

Courbure de Ricci-Ollivier sur les surfaces polyédriques

Benoit Loisel

Stage réalisé à l'université de Marne-la-Vallée

Directeur de stage : Pascal Romon

10 septembre 2012

Résumé

En s'inspirant des notions de courbures de la géométrie riemannienne, on tente d'élaborer une notion de courbure pour des objets de la géométrie discrète tels que des polyèdres, des graphes. Dans une première partie, on propose différentes définitions de courbures possibles qui utilisent le transport optimal. Dans une seconde partie, on se consacre à l'étude de l'espace des transports. Dans une troisième partie plus appliquée, on donne une méthode de détermination de la valeur des courbures de Ricci-Ollivier, ainsi que leur valeur dans quelques cas.

1 Motivations

1.1 Courbure en géométrie Riemannienne

On se donne une variété riemannienne munie de sa métrique (M, g) et on note d_g la distance associée.

Si M est une surface, on peut interpréter directement la courbure de Gauss comme caractérisant la comparaison du périmètre des petits cercles, ou de l'aire des petits disques. Par exemple, si l'on note κ la courbure de Gauss, le périmètre $C(r)$ des cercles de rayon r varie en $C(r) = 2\pi r \left(1 - \frac{\kappa}{6}r^2 + o(r^2)\right)$.

Si M est de dimension supérieure, on a un tenseur de Riemann, des courbures de Ricci, et des courbures sectionnelles. Si l'on munit M d'une mesure de Lebesgue, on peut voir la courbure de Ricci selon une direction comme la variation du $(n-1)$ -volume des sphères dans cette direction.

1.2 Cadre général

Partant de cette interprétation, on va définir une notion de courbure dans un espace métrique quelconque.

Soit (X, d, \mathbf{m}) un espace métrique mesuré par une famille \mathbf{m} de mesures $(\mathbf{m}_x)_{x \in X}$ de probabilité. On note $\mathcal{B}(X)$ l'ensemble des boréliens de X .

1.1 Définition. Pour tout couple de points $(x, x') \in X \times X$, on définit l'espace des transports $\Pi^1(\mathbf{m}_x, \mathbf{m}_{x'})$ comme l'ensemble des mesures ξ sur $X \times X$ telles que :

$$\forall B \in \mathcal{B}(X) \quad \xi(B \times X) = \mathbf{m}_x(B)$$

$$\forall B' \in \mathcal{B}(X) \quad \xi(X \times B') = \mathbf{m}_{x'}(B')$$

1.2 Définition. Soit $p \geq 1$, on appelle p-distance de Wasserstein la quantité :

$$W^p(x, x') = \inf \left\{ \left(\int_{(y, y') \in X \times X} d(y, y')^p d\xi(y, y') \right)^{\frac{1}{p}}, \xi \in \Pi^1(\mathbf{m}_x, \mathbf{m}_{x'}) \right\}$$

C'est une distance.

1.3 Définition. Yann Ollivier[2] définit la courbure de Ricci grossière de x à x' la quantité

$$\kappa = 1 - \frac{W^1(x, x')}{d(x, x')}$$

On choisit ici d'utiliser la 1-distance de Wasserstein W^1 plutôt que W^2 . En terme de transports, la seconde caractériserait mieux une énergie, alors que la première somme les trajets des transports de masse. Si l'on imagine le transport en terme de sacs de sables à déplacer, dans le cas de W^1 les sacs de sables sont interchangeable, pas dans le cas de W^2 .

1.3 Valeur de κ sur des variétés

Soit M une variété riemannienne de dimension n et x un point de M . Notons $K(v, w)$ la courbure sectionnelle du plan engendré par v et w . Notons $\tilde{\kappa}(v)$ la valeur moyenne de $n \times K(v, w)$ lorsque w parcourt la sphère unité.

Soit $\varepsilon, \delta > 0$. Soit B_x^ε la boule de centre x et de rayon ε . On effectue le transport parallèle de cette boule vers $B_{x'}^\varepsilon$ suivant δv . Alors, en moyenne, les points se sont déplacés de la distance $\delta \left(1 - \frac{\varepsilon}{2(n+2)} \tilde{\kappa}(v) + O(\varepsilon^2 + \varepsilon^2 \delta) \right)$.

On peut lier ce résultat à un autre, rappelé par Yann Ollivier [2] :

Si M est munie de la marche aléatoire de pas ε , si x et x' sont deux points de M assez proches, si v est le vecteur unitaire dirigeant l'unique géodésique joignant x à x' , alors on obtient pour la courbure grossière $\kappa(x, x') = \frac{\varepsilon^2 \tilde{\kappa}(v)}{2(n+2)} + O(\varepsilon^3 + \varepsilon^2 d(x, x'))$.

2 Courbure sur des graphes

2.1 Rappels sur les graphes

2.1 Définition. Un graphe $G = (V, E)$ est la donné d'un ensemble de sommets V et d'un ensemble d'arêtes $E \subset V \times V$.

On dit qu'un graphe est non réflexif si $\forall x \in V, (x, x) \notin E$, ce que l'on suppose pour tous les graphes par la suite.

Afin de pouvoir définir une métrique, pour chaque arête $(x, x') \in E$, on définit sa longueur $\omega_{x, x'} \in \mathbb{R}_+^*$.

On dit que le graphe est non orienté si $(x, x') \in E \Rightarrow (x', x) \in E$ et $\omega_{x, x'} = \omega_{x', x}$.

On suppose désormais que c'est le cas.

2.2 Définition. On dit que $x \in V$ et $x' \in V$ sont voisins dans le graphe $G = (V, E)$, et on note $x \sim x'$, si $(x, x') \in E$ On note $\Gamma(x) = \{y \sim x, y \in V\}$ l'ensemble des voisins de x .

2.3 Définition. Lorsque $\Gamma(x)$ est un ensemble fini, on définit le degré d'un sommet $x \in V$ par $d_x = \text{Card} \Gamma(x)$

On dit qu'un graphe est localement fini si le degré d_x est défini pour tout $x \in V$.
On dit qu'un graphe est connexe si

$$\forall x, x' \in V \exists x_0, \dots, x_n \ x = x_0 \sim x_1 \sim \dots \sim x_n = x'$$

2.4 Définition. Lorsque $G = (V, E)$ est connexe et localement fini, on définit la distance entre deux sommets d'un graphe par

$$d(x, x') = \inf \left\{ \sum_{i=0}^n \omega_{x_i, x_{i+1}}, \ x = x_0 \sim x_1 \sim \dots \sim x_n = x' \right\}$$

C'est une distance sur l'ensemble V des sommets du graphe.

2.2 Surfaces polyédriques

On peut se donner comme définition d'une surface polyédrique triangulée que c'est un graphe tel que toute arête appartient à exactement deux faces qui sont des triangles, et d'une surface polyédrique quadrangulée que c'est un graphe dont chaque arête appartient à exactement deux faces qui sont des quadrilatères.

2.3 Choix des mesures

2.3.1 La marche aléatoire uniforme

Comme le fait Yann Ollivier[2], il est naturel de considérer la marche aléatoire uniforme sur le graphe que l'on peut définir en $x \in V$ par la mesure de probabilité vérifiant

$$\forall y \in V, \mathbf{m}_x(\{y\}) = \begin{cases} \frac{1}{d_x} & \text{si } y \sim x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On appellera courbure grossière, ou courbure de Ricci-Ollivier la quantité associée, que l'on note κ ou κ^1 .

2.3.2 La marche aléatoire paresseuse

Lin et Yau[5] proposent de modifier la définition précédente en autorisant la marche aléatoire à rester sur place avec un paramètre $1 - t$ (ils notent ce paramètre $\alpha = 1 - t$). La mesure de probabilité vérifie la formule suivante :

$$\forall y \in V, \mathbf{m}_x^t(\{y\}) = \begin{cases} 1 - t & \text{si } y = x \\ \frac{t}{d_x} & \text{si } y \sim x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Lorsque $t = 1$, on retrouve la définition précédente.

Lorsque $t \rightarrow 0$, on montrera qu'il existe une quantité que l'on peut noter $Ric(x, x')$ telle que :

$$\kappa^t(x, x') = 1 - \frac{W^1(\mathbf{m}_x, \mathbf{m}_{x'})}{d(x, x')} = t Ric(x, x') + o(t)$$

On appellera courbure grossière de x vers x' cette quantité $Ric(x, x')$.

2.3.3 Une définition plus géométrique

Ces définitions ne sont sensées que pour les graphes unitaires, on cherche une définition qui puisse tenir compte des longueurs que l'on attribuerait aux graphes.

On constate que l'on peut écrire $\mathbf{m}_x^t = \delta_x + t\Delta_x$ où δ_x est la mesure Dirac en x et Δ_x est lié à un laplacien discret pour des graphes unitaires.

Plus généralement, on envisage de considérer un laplacien plus géométrique Δ^g qui tient compte de la métrique du graphe et non plus seulement de sa combinatoire. Afin que \mathbf{m}_x^t puisse être une mesure de probabilité pour au moins une valeur de t , celui-ci doit vérifier $\forall y \neq x, \Delta_x^g(\{y\}) \geq 0$ et $\Delta^g(V) = 0$.

Dans le cas des triangulations, on a un laplacien géométrique Δ^g donné par :

Si $y \sim x$, si α et β sont les sommets opposé à l'arête (x, y) ,

on a $\Delta_x^g(\{y\}) = \frac{1}{2}(\cot(\alpha) + \cot(\beta))$.

Si $y = x$, $\Delta_x^g(\{x\}) = -\sum_{y \sim x} \Delta_x^g(\{y\})$

Sinon, on a $\Delta_x^g(\{y\}) = 0$

Pour plus de détails sur l'origine de ces formules, lire [1] et [4].

Pour respecter la condition, les angles α et β (choisis dans l'intervalle $]0, \pi[$) vérifient $\cot(\alpha) + \cot(\beta) \geq 0$, ce qui revient à $(\alpha + \beta) \leq \pi$. On peut se limiter aux triangulations vérifiant cette condition (triangulation de Delaunay).

On note alors $Ric^g(x, x')$ la quantité associée à ce laplacien que l'on voit encore comme une courbure sur l'arête (x, x') .

2.4 Bonnet-Mayers pour les graphes

On suit ici la démonstration donnée par Lin et Yau [5]. On retiendra deux résultats aisés à constater sur nos exemples ultérieurs.

Ce premier théorème lie diamètre et courbure.

2.5 Théorème. *Pour tout couple de sommets $(x, x') \in V$,*

si $\kappa(x, x') > 0$, alors $d(x, x') \leq \frac{2}{\kappa(x, x')}$

si $Ric(x, x') > 0$, alors $d(x, x') \leq \frac{2}{Ric(x, x')}$

S'il existe une constante k telle que pour toute arête $(x, x') \in E$ $\kappa(x, x') \geq k > 0$ (resp. $Ric(x, x') \geq k > 0$), alors $diam(G) \leq \frac{2}{k}$

Ce second théorème est analogue au théorème de Bonnet-Mayers.

2.6 Théorème. *On suppose que le graphe $G = (V, E)$ est localement fini, et que $\Delta = \sup_{x \in V} d_x < +\infty$.*

On suppose qu'il existe une constante k telle que pour toute arête $(x, x') \in E$ $\kappa(x, x') \geq k > 0$.

Alors on sait majorer le nombre de sommets $N = Card V$ du graphe par :

$$N \leq 1 + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{2}{k} \rfloor} \Delta^i \prod_{j=1}^{i-1} (1 - j \frac{k}{2})$$

Démonstration. On conserve les notations des hypothèses des théorèmes et les notations des mesures précédemment définies.

W^1 est une distance sur l'espace des mesures donc

$$W^1(\mathbf{m}_x^t, \mathbf{m}_{x'}^t) \leq W^1(\mathbf{m}_x^t, \delta_x) + W^1(\delta_x, \delta_{x'}) + W^1(\delta_{x'}, \mathbf{m}_{x'}^t)$$

$$\text{Ainsi } d(x, x') \left(1 + \frac{\kappa_t(x, x')}{t}\right) \leq t + d(x, x') + t$$

$$\text{Soit } \frac{\kappa_t(x, x')}{t} \leq \frac{2}{d(x, x')}$$

Par passage à la limite on a l'inégalité pour $Ric(x, x')$.

Si l'inégalité $d(x, x') \leq \frac{2}{Ric(x, x')} \leq \frac{2}{k}$ est vraie pour tout couple de sommets, alors elle l'est pour le diamètre. \square

3 Géométrie de l'espace des transports

3.1 Écriture matricielle

Dans les différents cas considérés, le support des mesures \mathbf{m}_x^t est toujours un ensemble fini :

$$\text{supp}(\mathbf{m}_x^t) \subset \{x\} \cup \{y, y \sim x\}$$

. Par conséquent l'espace des transports est un espace de mesures dont le support est lui aussi fini :

$$\forall \xi \in \Pi^1(\mathbf{m}_x^t, \mathbf{m}_{x'}^t), \text{supp}(\xi) \subset \{x\} \cup \{y, y \sim x\} \times \{x'\} \cup \{y', y' \sim x'\}$$

On numérote les éléments des supports des mesures $\text{supp}(\mathbf{m}_x^t) = \{x_0, \dots, x_d\}$ et $\text{supp}(\mathbf{m}_{x'}^t) = \{x'_0, \dots, x'_{d'}\}$ avec $x_0 = x$ et $x'_0 = x'$, $d = d_x$ et $d' = d_{x'}$.

On peut ainsi écrire $\xi \in \Pi^1(\mathbf{m}_x^t, \mathbf{m}_{x'}^t)$ comme une matrice

$$(\xi_{i,j} = \xi(\{(x_i, x'_j)\}) \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq d' \end{matrix})$$

On peut interpréter le transport comme le déplacement de masses, ou de sacs de sable, d'une disposition initiale vers une disposition finale. $\xi_{i,j}$ représente alors la masse transportée de x_i vers x'_j .

On utilise aussi cette numérotation pour définir la matrice D des distances utiles par $D_{i,j} = d(x_i, x'_j)$ ici définie sur les couples de points du support des transports. Cela suffit pour calculer la distance de Wasserstein définie précédemment.

On réécrit alors l'espace des transports à partir d'équation et d'inéquations linéaires. $\xi \in \Pi^1(\mathbf{m}_x^t, \mathbf{m}_{x'}^t)$ est un transport si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^{d'} \xi_{0,j} = 1 + t\Delta_x(\{x_0\}) \quad \forall 1 \leq i \leq d \quad \sum_{j=0}^{d'} \xi_{i,j} = t\Delta_x(\{x_i\}) \\ \sum_{i=0}^d \xi_{i,0} = 1 + t\Delta_{x'}(\{x'_0\}) \quad \forall 1 \leq j \leq d' \quad \sum_{i=0}^d \xi_{i,j} = t\Delta_{x'}(\{x'_j\}) \\ \forall i, j, \xi_{i,j} \geq 0 \end{array} \right.$$

La première ligne définit des équations sur les lignes de ξ . La deuxième ligne définit des équations sur les colonnes de ξ . La dernière ligne donne l'intersection du $(d + d' + 1)$ -plan défini par ces équations avec le cône de l'espace de coordonnées toutes positives. On s'attend à ce que de telles équations définissent des espaces semblables lorsque t varie, ce que l'on confirmera par la suite.

Soit $f(i, j) = (d' + 1)i + j$, c'est une bijection de $[0, d] \times [0, d']$ sur $[0, dd' + d + d']$. Notons $g = f^{-1}$ son inverse. On définit alors la matrice colonne $\tilde{\xi}$ du transport ξ et la matrice ligne \tilde{D} de la distance D en posant $\tilde{\xi}_k = \xi_{g(k)}$ et $\tilde{D}_l = D_{g(l)}$.

$$\tilde{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_{0,0} \\ \vdots \\ \xi_{d,d'} \end{pmatrix}, \tilde{D} = \begin{pmatrix} D_{0,0} & \dots & D_{g(k)} & \dots & D_{d,d'} \end{pmatrix}$$

On remarque que, sous cette forme, il est naturel de calculer la distance de Wasserstein comme un produit matriciel :

$$W^1(x, x') = \inf \{ \tilde{D} \cdot \tilde{\xi} \mid \xi \in \Pi^1(\mathbf{m}_x, \mathbf{m}_{x'}) \}$$

Les contraintes d'égalités sont alors des matrices lignes. Notons L_i la matrice ligne avec des 1 en $f(i, j)$ pour $j \in \{0, \dots, d'\}$ et des 0 ailleurs, elles traduisent les égalités sur les lignes de ξ . Notons, de même, C_j la matrice ligne avec des 1 en $f(i, j)$ pour $i \in \{0, \dots, d\}$ et des 0 ailleurs, qui traduisent les égalités sur les colonnes de ξ .

Les contraintes d'égalités se traduisent par l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & & & & & & & & \\ & & & \dots & & & & & & & \\ & & & & \dots & & & & & & \\ & & & & & 1 & \dots & 1 & & & \\ & 1 & & & & & & & 1 & & \dots & 1 \\ & & \ddots & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_{0,0} \\ \vdots \\ \xi_{0,d'} \\ \xi_{1,0} \\ \vdots \\ \xi_{d,0} \\ \vdots \\ \xi_{d,d'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + t\Delta_x(\{x\}) \\ t\Delta_x(\{x_1\}) \\ \vdots \\ t\Delta_x(\{x_d\}) \\ 1 + t\Delta_{x'}(\{x'\}) \\ t\Delta_{x'}(\{x'_1\}) \\ \vdots \\ t\Delta_{x'}(\{x'_d\}) \end{pmatrix}$$

On peut l'écrire ainsi :

$$\xi \in \Pi^1(\mathbf{m}_x^t, \mathbf{m}_{x'}^t) \Leftrightarrow \begin{cases} A \cdot \tilde{\xi} = C + tB \\ \xi_{i,j} \geq 0 \end{cases}$$

où l'on remarque que A est la matrice constituée des lignes L_i et C_j .

On introduit enfin le transport E^0 correspondant à $t = 0$, $\{E^0\} = \Pi^1(\delta_x, \delta_{x'})$. C'est la matrice colonne avec un seul 1 initial.

3.2 Étude de l'espace des transports

Notons $\mathcal{P}^t = \{ \tilde{\xi} = (\xi_k)_{0 \leq k \leq dd' + d + d'}, A \cdot \tilde{\xi} = tB + C \}$ le $(d + d' + 1)$ -plan affine de l'espace vectoriel des matrices colonnes à $(d + 1)(d' + 1)$ coordonnées.

Notons $K^t = \{\tilde{\xi} \in \mathcal{P}^t, \forall i, j \xi_{i,j} \geq 0\} = \Pi^1(\mathbf{m}_x^t, \mathbf{m}_{x'}^t)$ l'espace des transports. C'est l'intersection du plan affine \mathcal{P}^t avec le cône de l'espace des coordonnées positives.

C'est un convexe compact non vide (à condition que \mathbf{m}_x^t et $\mathbf{m}_{x'}^t$ soient des mesures). C'est même un polyèdre. Le minimum que l'on calcul sur cet espace est réalisé en l'un de ses sommets (point extrémal).

3.2.1 Proposition

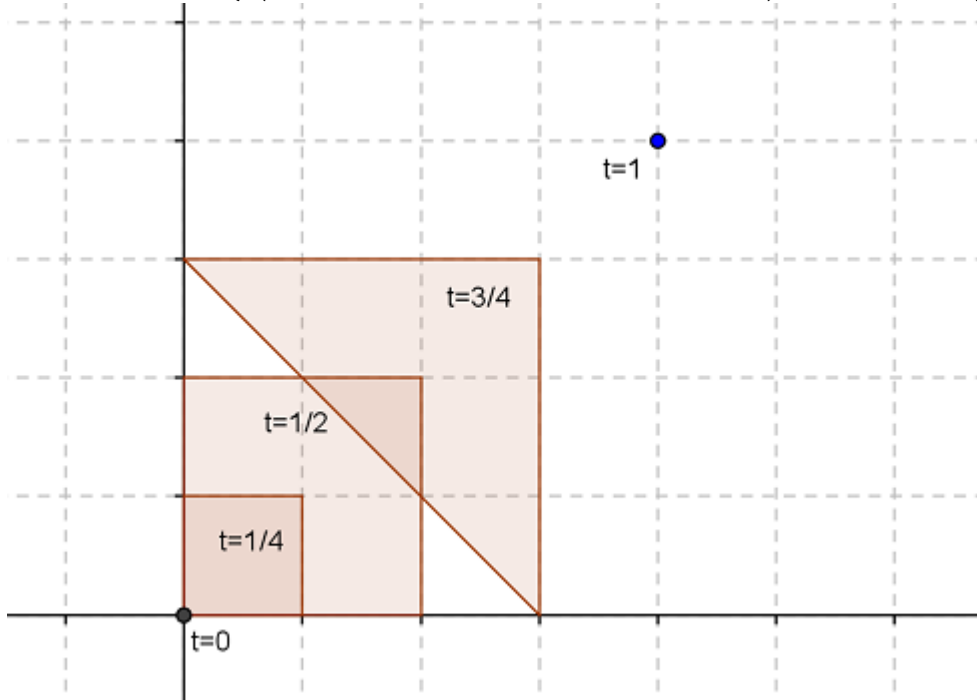
Lin et Yau prouvent [5] que $\frac{\kappa^t}{t}$ a une limite en 0. Pour les graphes, on a mieux : c'est une fonction affine par morceaux. En particulier, on a :

Si $0 \leq t \leq s \leq \frac{-1}{\Delta_x(\{x\}) + \Delta_{x'}(\{x'\})}$ ($\Delta_x(\{x\})$ est toujours négatif)
 Si $\lambda = \frac{t}{s}$
 Alors les espaces K^t et K^s sont liés par la transformation $K^t = \lambda K^s + (1 - \lambda)E^0$.
 En particulier, pour t assez petit, les espaces $(K^t - E^0)$ sont homothétiques.

3.2.2 Exemple simple : la dimension 2

C'est le seul dessin possible. On n'a ici pas le choix, ceci impose des matrices de taille 2 3 (ou de taille 3 2) pour ξ donc de taille 6 pour $\tilde{\xi}$. Notons $a = \Delta_x(x_1) \leq 0$, $b = \Delta_{x'}(x'_1) \leq 0$ et $c = \Delta_{x'}(x'_2) \leq 0$. Lorsqu'il s'agit du laplacien des graphes $a = 1, b = c = \frac{1}{2}$

$$\text{On a alors } \mathcal{P}^t = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + x + y - t(a + b + c) & tb - x & tc - y \\ ta - x - y & x & y \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$$



On a utilisé une écriture en coordonnées du 2-plan \mathcal{P}^t , que l'on pourrait qualifier de canonique.

Les inéquations s'écrivent :

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq tb \\ 0 &\leq y \leq tc \\ t(a+b+c) - 1 &\leq x+y \leq ta \end{aligned}$$

Les espaces K^t sont donc homothétiques dans cette carte lorsque $t \leq \frac{1}{a+b+c}$. On constate sur cet exemple que la borne est optimale.

3.2.3 Démonstration de la proposition

3.1 Lemme. Si $0 < t < s$ alors $\mathcal{P}^t = \lambda\mathcal{P}^s + (1-\lambda)E^0$

Démonstration. L'hypothèse sert à imposer $\lambda \in]0, 1[$

Si $S = (S_{ij})_{i,j} \in \mathcal{P}^s$, ce qui s'écrit $A \cdot S = sB + C$, soit $T = \lambda S + (1-\lambda)E^0$

$$\begin{aligned} \text{On a } A \cdot E^0 &= C. \\ A \cdot T &= A \cdot (\lambda S + (1-\lambda)E^0) \\ &= \lambda(sB + C) + (1-\lambda)C \\ &= tB + C \end{aligned}$$

Donc $\lambda\mathcal{P}^s + (1-\lambda)E^0 \subset \mathcal{P}^s$.

Comme ces deux espaces sont des plans affines de même dimension $d+d'+1$, on a égalité. \square

3.2 Lemme. Si $S \in K^s$ Alors $S_0 \geq 1 + s(\Delta_x(\{x\}) + \Delta_{x'}(\{x'\}))$

Démonstration. Notons $N = dd' + d + d'$.

Par définition, $1 = \sum_{k=0}^N S_k$.

On a

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq i \leq d, L_i \cdot S &= \sum_{j=0}^{d'} S_{f(i,j)} = s\Delta_x(\{x_i\}) \\ \forall 1 \leq j \leq d', C_j \cdot S &= \sum_{i=0}^d S_{f(i,j)} = s\Delta_{x'}(\{x'_j\}) \end{aligned}$$

On somme toutes ces égalités :

$$\sum_{i=1}^d L_i \cdot S + \sum_{j=1}^{d'} C_j \cdot S = \left(\sum_{k=1}^N S_k + \underbrace{\sum_{l=1}^N S_l}_{R(S)} \right) = s\Delta_x(\{x_1, \dots, x_d\}) + s\Delta_{x'}(\{x'_1, \dots, x'_{d'}\})$$

où l'indice de sommation l n'est jamais 0. En particulier, $R(S) \geq 0$

On en déduit

$$\begin{aligned} S_0 &= 1 - \sum_{k=1}^N S_k \\ &= 1 - s(\Delta_x(\{x_1, \dots, x_d\}) + \Delta_{x'}(\{x'_1, \dots, x'_{d'}\})) + R(S) \\ &\geq 1 + s(\Delta_x(\{x\}) + \Delta_{x'}(\{x'\})) \end{aligned}$$

\square

Démonstration. On démontre alors le résultat par double inclusion.

On suppose $0 < t < s$

Soit $T = \lambda S + (1 - \lambda)E^0 \in \lambda K^s + (1 - \lambda)E^0$. On a $T \in \lambda \mathcal{P}^s + (1 - \lambda)E^0 = \mathcal{P}^t$ comme $\lambda \in]0, 1[$, S et E^0 n'ont que des coefficients positifs, T aussi. Donc $T \in K^t$

On a donc $\lambda K^s + (1 - \lambda)E^0 \subset K^t$

Si $T \in K^t$, soit $S = \frac{1}{\lambda}T + (1 - \frac{1}{\lambda})E^0$ de telle sorte que $T = \lambda S + (1 - \lambda)E^0$

On veut montrer que $S \in K^s$. On a naturellement $S \in \mathcal{P}^s$ par le premier lemme, donc il suffit de vérifier que $S_0 \geq 0$ car $\frac{1}{\lambda} > 1$

Par le second lemme, $T_0 \geq 1 + t(\Delta_x(\{x\}) + \Delta_{x'}(\{x'\}))$.

Donc $S_0 \geq \frac{s}{t}(1 + t(\Delta_x(\{x\}) + \Delta_{x'}(\{x'\}))) + (1 - \frac{s}{t}) = 1 + s(\Delta_x(\{x\}) + \Delta_{x'}(\{x'\}))$

Donc, par l'hypothèse $0 < s \leq \frac{-1}{\Delta_x(\{x\}) + \Delta_{x'}(\{x'\})}$, on a $S_0 \geq 0$, donc $S \in K^s$ \square

3.2.4 Convergence vers la courbure Ric

Soit \tilde{D} une matrice de distance, on rappelle que :

$$W_t^1(x, x') = \inf\{\tilde{D} \cdot \tilde{\xi}, \xi \in K^t\}$$

$$\kappa^t(x, x') = 1 - \frac{W_t^1(x, x')}{d(x, x')}$$

$$Ric(x, x') = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\kappa^t(x, x')}{t}$$

Pour $0 < t \leq s \leq \frac{-1}{\Delta_x(\{x\}) + \Delta_{x'}(\{x'\})}$

$$\begin{aligned} W_t^1 &= \inf\{\tilde{D} \cdot \tilde{\xi}, \xi \in K^t\} \\ &= \inf\{\lambda \tilde{D} \cdot \tilde{\xi} + (1 - \lambda)d(x, x'), \xi \in K^s\} \\ &= t \frac{W_s^1}{s} + (1 - \frac{t}{s})d(x, x') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa^t &= 1 - \frac{t \frac{W_s^1}{s} + (1 - \frac{t}{s})d(x, x')}{d(x, x')} \\ &= \frac{t}{s} \left(1 - \frac{W_s^1}{d(x, x')}\right) \\ &= \frac{t}{s} \kappa^s \end{aligned}$$

Donc $\frac{\kappa^t(x, x')}{t}$ est une constante pour t assez petit.

3.3 Transport entier

On utilise le résultat d'optimisation linéaire suivant que l'on retrouve dans [3]

3.3 Théorème. *Soit le problème de minimisation linéaire :*

$$f(\xi) = \min\{f(X), A \cdot X = B \text{ et } \forall k, X_k \geq 0\}$$

Si A est totalement unimodulaire, si B est à coefficients entiers, Alors il existe une solution ξ à coefficients entiers au problème de minimisation.

3.4 Corollaire. *Pour un laplacien uniforme, donc en particulier pour les graphes, $Ric(x, x')d_x d_{x'} \in \mathbb{N}$*

Cela signifie que dans le cas des graphes, le transport optimal s'interprète comme un déplacement de sacs de sables.

Si le degré est borné, cela signifie que la courbure prend un ensemble fini de valeurs sur les arêtes du graphe.

3.5 Lemme. *La matrice A, utilisée ici, est totalement unimodulaire.*

Démonstration. On rappelle que « unimodulaire » signifie que les cofacteurs de tout rang sont de déterminant -1, 0 ou 1. On rappelle également que A est une matrice à $d + d' + 2$ lignes et $(d + 1)(d' + 1)$ colonnes. On le démontre par récurrence sur le rang r des cofacteurs.

Notons $\Delta_{(k_1, \dots, k_r), (l_1, \dots, l_r)}^r = (a_{k_i, l_j})_{1 \leq i, j \leq r} := \Delta_{\underline{k}, \underline{l}}^r$ la matrice extraite de A où l'on a gardé les lignes $\underline{k} = (k_1, \dots, k_r)$ et les colonnes $\underline{l} = (l_1, \dots, l_r)$ et $\delta_{\underline{k}, \underline{l}}^r = \det \Delta_{\underline{k}, \underline{l}}^r$ son déterminant.

Si $r = 1$ ou $r = 2$, alors c'est vrai car les coefficients de A sont dans $\{0, 1\}$. On suppose désormais $r \geq 3$.

On suppose que $\delta_{\underline{k}, \underline{l}}^{r-1} \in \{-1, 0, 0\}$ pour tous choix de lignes \underline{k} et de colonnes \underline{l} .

On considère un cofacteur de rang r $\Delta_{\underline{k}, \underline{l}}^r$. Ses colonnes sont des portions de colonnes de A donc contiennent au plus deux 1 et des 0 ailleurs.

S'il existe une colonne de $\Delta_{\underline{k}, \underline{l}}^r$ qui est nulle, alors $\delta_{\underline{k}, \underline{l}}^r = 0$. On a le même résultat si une ligne ne contient que des zéros. On suppose désormais que ça n'est pas le cas.

S'il existe une colonne de $\Delta_{\underline{k}, \underline{l}}^r$ qui ne contient qu'un seul 1, notons (i, j) la position de ce 1. Alors $\delta_{(k_1, \dots, k_r), (l_1, \dots, l_r)}^r = (-1)^{i+j} \delta_{(k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_r), (l_1, \dots, l_{j-1}, l_{j+1}, \dots, l_r)}^r \in \{-1, 0, 1\}$.

Sinon, $\Delta_{\underline{k}, \underline{l}}^r$ possède exactement deux 1 sur chaque colonne. Montrons qu'alors la famille de ses colonnes est liée, notons C_j la j -ième colonne de $\Delta_{\underline{k}, \underline{l}}^r$. On peut distinguer les 1 « du haut », c'est-à-dire ceux provenant des lignes 0 à d de la matrice A des autres provenant des lignes $d + 1$ à $d + d' + 1$. Notons q le nombre de lignes sur lesquels apparaissent ces 1, c'est-à-dire $q = \text{Card}\{i, 0 \leq k_i \leq d\}$. On note, pour $1 \leq i \leq q$, s_i le nombre de 1 sur les lignes 1 à i de $\Delta_{\underline{k}, \underline{l}}^r$, c'est-à-dire $s_i = \max\{j, l_j < d(k_i + 1)\}$. On a évidemment $s_q = r$. On pose $\widetilde{C}_j =$

$\begin{cases} C_j & \text{si } j \in \{s_1, \dots, s_q\} \\ C_j - C_{j+1} & \text{textsinon} \end{cases}$. La famille (\widetilde{C}_j) est libre si et seulement si la

famille (C_j) l'est. On s'intéresse aux colonnes $\widetilde{C}_j \neq C_j$. Il y en a $(s_1 - 1) + \dots + (s_q - s_{q-1} - 1) = r - q$. Ces matrices colonnes ont des 0 sur leurs q premiers coefficients et la somme de leurs coefficient vaut $-1 + 1 = 0$. Elles sont donc incluses dans un espace vectoriel de dimension $r - q - 1$, donc elles forment une sous-famille liée de \widetilde{C}_j . D'où le résultat. \square

Démonstration. du corollaire On choisit t assez petit de telle sorte que $\frac{\kappa^t(x, x')}{t} = 1 - \frac{W^1(\mathbf{m}_x^t, \mathbf{m}_{x'}^t)}{d(x, x')}$ soit indépendant de t , sous la forme $t = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$.

On résout :

$$D \cdot \xi = \min\{D \cdot X, A \cdot X = kdd'(tB + C) \text{ et } \forall k, X_k \geq 0\}$$

On a $kdd'(tB + C) = dd'B + kdd'C$ où $dd'B$ et $kdd'C$ ont tous leurs coefficients entiers, donc le terme de droite $kdd'(tB + C)$ aussi. Donc, par le théorème, une solution du problème de minimisation ξ a tous ses coefficients entiers.

De plus, $\tilde{\xi} = \frac{1}{kdd'}\xi$ est un transport optimal pour le graphe. On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^t}{t}dd' &= \frac{1}{t}(1 - D \cdot \tilde{\xi}) \\ &= kdd'(1 - \frac{1}{kdd'}D \cdot \xi) \\ &= kdd' - D \cdot \xi \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Rappelons que, malgré les apparences, ceci est indépendant de t donc de k , donc on a le résultat. \square

4 Calculs de courbure

4.1 Optimisation linéaire

On va donner un critère permettant de savoir si un transport donné ξ est optimal ou non. Par la suite, on propose des transports dont on vérifie qu'ils sont optimaux et on en déduit la valeur de la courbure associée.

On note $X = \mathbb{R}^N$, on regarde le sous-espace M défini par les contraintes d'égalité a_i , indexées par $i \in I$ $M = \{x \in X, a_i(x) = 0 \forall i \in I\}$ et le sous-espace défini par les contraintes d'égalités a_i , $i \in I$ et d'inégalité b_j , $j \in J$ $M = \{x \in X, a_i(x) = 0 \forall i \in I \text{ et } b_j(x) \geq 0 \forall j \in J\}$.

On veut calculer $\inf\{f(x), x \in S\}$

4.1 Définition. Soit $L^* = (\mathbb{R}^I)^* \times (\mathbb{R}^J)_+$ (c'est-à-dire positive sur la base canonique de \mathbb{R}^J), soit $x \in X$. On dit que λ est un vecteur de Kuhn-Tucker associé à x s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

- (i) $\forall i \in I, \lambda_i a_i(x) = 0; \forall j \in J, \lambda_j b_j(x) = 0; \nabla(f - \lambda(a, b)) = 0$
- (ii) $\forall i \in I, \lambda_i a_i(x) = 0; \forall j \in J, \lambda_j b_j(x) = 0; f - \lambda c$ atteint son minimum en x .
- (iii) (x, λ) est un point selle du lagrangien $L(x, \lambda) = f(x) - \lambda c(x)$

4.2 Théorème. *Théorème de Kuhn-Tucker* On suppose X convexe, a_i affines, b_j concaves, f convexe et de classe \mathcal{C}^1

On suppose (condition de Slater) qu'il existe $x^{(0)} \in X$ tel que $\forall j \in J b_j(x^{(0)}) > 0$

Alors on a l'équivalence des trois propositions suivantes :

- (i) f admet un minimum local sur S en x .
- (ii) f atteint son minimum sur S en x .
- (iii) Il existe un vecteur de Kuhn-Tucker $\lambda \in L^*$ associé à x .

Dans le cas des graphes, les hypothèses du théorème sont naturellement satisfaites, où les contraintes d'égalité correspondent aux lignes de la matrice A définie précédemment et les contraintes d'inégalités à $\xi_{ij} \geq 0$, la fonction f est $f(\xi) = \tilde{D}\xi$.

Il reste à comprendre ce qu'est un vecteur de Kuhn-Tucker pour un transport ξ . Pour les contraintes d'égalités, $a_i(\xi) = 0$ donne $\lambda_i \in \mathbb{R}$ quelconque. Pour les contraintes d'inégalités, si $\tilde{\xi}_j = 0$ on dit que la contrainte b_j est active et alors $\lambda_j \geq 0$ sinon on a $\lambda_j = 0$. De plus, on doit avoir $\nabla f = D = \nabla(\lambda(a, b))$. Autrement

dit, la matrice des distances (sous sa forme rectangulaire) s'écrit comme somme d'une combinaison linéaire de ses lignes et colonnes, auxquels s'ajoutent des valeurs positives là où il n'y a pas de masse transportée.

$$D = \sum_{i=1}^d \lambda_i L_i + \sum_{j=1}^{d'} \mu_j C_j + \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}(\xi)} \nu_{ij} E_{ij}$$

Ainsi, on peut proposer un transport et chercher les coefficients du vecteur de Kuhn-Tucker associé pour vérifier qu'il est optimal.

On peut aussi procéder à l'envers afin de chercher un transport optimal, en optenant une matrice à coefficients positifs avec autant de zéros que possibles par additions et soustractions de lignes et colonnes sur la matrice D . On a vu que l'espace des transports est un polyèdre et que le minimum est réalisé en l'un des sommets, ce qui revient à maximiser le nombre de contraintes actives ($\nu_{ij} > 0$). Cette méthode revient donc à chercher le ou un des sommets en lequel le minimum est atteint.

4.2 Graphes triangulés

4.2.1 Les tétraèdres

Un premier exemple simple de graphe triangulé est le tétraèdre. En dimension n cela correspond au graphe complet K_{n+1} . Pour celui-ci, d'un sommet x à un sommet distinct x' nécessairement voisin, on peut numéroter les sommets $x = x_0 = x'_1$, $x' = x'_0 = x_1$ et $x_i = x'_i \forall i \in \{2, \dots, n\}$. Regardons ce que donnent les courbures avec les différentes définitions.

Pour la définition d'Ollivier, on propose le transport

$$\tilde{\xi}_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } i = j \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

C'est un transport optimal. En effet, on a par exemple

$$D = L_0 - C_j + 2E_{00} + \sum_{i \neq j} \nu_{ij} E_{ij}$$

avec les coefficients $\nu_{ij} \geq 0$. On a $W^1 = \frac{1}{n}$ donc $\kappa(x, x') = \frac{n-1}{n}$.

Pour la seconde définition, on propose le transport

$$\tilde{\xi}_{ij}^t = \begin{cases} \frac{t}{n} & \text{si } i = j \geq 2 \\ \frac{t}{n} & \text{si } (i, j) = (0, 1) \text{ ou } (i, j) = (1, 0) \\ 1 - \frac{t(n+1)}{n} & \text{si } (i, j) = (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

C'est un transport optimal. En effet, on a par exemple

$$D = C_1 - L_0 + \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}(x, x')} \nu_{ij} E_{ij}$$

avec $\nu_{ij} \geq 0$. On a donc $Ric(x, x') = \frac{n+1}{n}$.

4.2.2 Surfaces triangulées

Dans le cas de surfaces polyédriques, si la matrice D qui nous intéresse peut se calculer uniquement à partir des voisins des deux points x et x' de l'arête considérée, on peut alors calculer la courbure grossière de Ricci. Il suffit le plus souvent pour cela que le graphe soit suffisamment étendu. On peut considérer que dans le cas contraire on assiste à un effet de bord. C'est une hypothèse assez raisonnable lorsqu'on envisage que ces graphes sont obtenus par triangulations de surfaces.

On considère une arête (x, x') d'un graphe unitaire. Comme la courbure est symétrique, on peut supposer que les degrés vérifient $d_x \leq d_{x'}$. On a les valeurs suivantes :

$(d_x, d_{x'})$	(3, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)	(5, 5)	(5, 6)	(6, 6)	(d, d')
κ	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{4}{d} + \frac{8}{d'} - 2$
Ric	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{4}{d} + \frac{8}{d'} - 2$

À noter que le cas $(d, d') = (3, 3)$ correspond au tétraèdre calculé précédemment. Ainsi, on obtient une valeur de courbure nulle pour $(d, d') = (4, 8)$ et $(6, 6)$. En utilisant le laplacien géométrique on trouve $\kappa^g = \frac{12-d-d'}{\sqrt{3}}$ pour $d, d' \geq 6$.

4.3 Les polyèdres de Platon

On calcule les courbures suivantes.

	κ	Ric
tétraèdre	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
cube	0	$\frac{2}{3}$
octaèdre	$\frac{1}{2}$	1
dodécaèdre	$-\frac{1}{3}$	0
icosaèdre	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

Si on applique le théorème de Bonnet-Mayers donné pour les graphes, on retrouve ici un diamètre de graphe égal au diamètre maximal donné par le théorème via la courbure.

Ce calcul de courbure ne tient compte que des voisins des sommets de l'arête calculée. On pourrait aussi nommer « voisins de x » l'ensemble des sommets du graphes qui appartiennent à un même polygone que x . Notons κ^* et Ric^* les courbures nouvellement définies. On trouve alors pour le cube $\kappa_{cube}^* = \frac{2}{3}$ et $Ric_{cube}^* = 1$; et pour le dodécaèdre $\kappa_{dod}^* = \frac{1}{9}$ et $Ric_{dod}^* = \frac{2}{9}$. Cette nouvelle définition semble davantage tenir compte de la géométrie des surfaces polyédriques, on a cette fois-ci des polyèdres à courbure positive. L'utilisation du laplacien géométrique rendrait sans doute un résultat tout aussi satisfaisant.

4.3.1 Le tétraèdre en dimension supérieure

On lui trouve les valeurs de courbure $\kappa = \frac{2}{3}$ et $Ric = \frac{4}{3}$. Si on généralise le tétraèdre aux dimensions supérieures, c'est-à-dire étudier la courbure des graphes complets, on trouve pour le graphe à n sommets : $\kappa = \frac{n-2}{n-1}$ et $Ric = \frac{n}{n-1}$

4.3.2 Le cube en dimension supérieure

Le calcul de la courbure Ric a déjà été réalisé par Cédric Villani. Pour le cube de dimension n , $n \geq 2$, on trouve $\kappa = 0$, $Ric = \frac{2}{n}$.

Et si on tient compte de notre nouvelle définition de voisins $\kappa^* = \frac{4(n-1)}{n(n+1)}$, $Ric^* = \frac{4}{n+1}$.

4.4 Graphes quadrangulés

Comme pour les polyèdres de Platon, on peut tenter de se rapprocher d'une définition plus géométrique en calculant l'étoile, ou conserver la définition de courbure de Ricci-Ollivier.

On considère une arête (x, x') d'un graphe unitaire quadrangulé. Comme la courbure est symétrique, on peut supposer que les degrés vérifient $d_x \leq d_{x'}$. On a les valeurs suivantes :

(d, d')	κ	Ric	κ^*	Ric^*
(3, 3)	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$
(3, 4)	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{24}$
(4, 4)	0	0	0	0
(d, d')	$\frac{6}{d'} + \frac{2}{d} - 2$	$\frac{6}{d'} + \frac{2}{d} - 2$	$\frac{9}{d'} + \frac{3}{d} - 3$	$\frac{9}{d'} + \frac{3}{d} - 3$

Le cas (4, 4) qui se réalise comme un réseau plan présente, pour toutes les définitions possibles une courbure nulle.

Les courbures sont toutes négatives strictement sauf pour les cas $(d, d') = (3, 3)$, (3, 4) et (4, 4).

4.5 Le pavage hexagonal

Les deux premiers pavages réguliers du plan, à savoir le pavage triangulaire et le pavage carré, présentent une courbure de Ricci-Ollivier nulle. Pour le pavage hexagonal on trouve cette fois $\kappa = Ric = -2/3$. Si l'on prend en compte l'étoile comme on l'avait proposé précédemment, on arrive à $\kappa^* = Ric^* = -1/3$.

Si on essaie d'exprimer sa courbure avec le laplacien géométrique, c'est impossible car il ne définit pas une mesure, mais une mesure signée.

4.6 Un exemple de calcul : κ pour les surfaces triangulées

On suppose $d' > d \geq 6$. On traite à part les autres cas.

Pour une certaine numérotation des sommets, la matrice D des distances s'écrit :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On opère en ajoutant et soustrayant des lignes et colonnes pour obtenir la matrice

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Afin qu'il vérifie d'être un transport optimal, il suffit pour de transport que l'on va proposer qu'il prenne ses valeurs non nulles là où Δ a ses 0.

On propose alors le transport

$$X = \frac{1}{dd'} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & d & 0 \end{pmatrix}$$

où A est une matrice que l'on remplit comme on veut de telle sorte que X ait $\frac{1}{d'}$ pour somme de ses coefficients sur chaque colonne et $\frac{1}{d}$ pour somme de ses coefficients sur chaque ligne, ce qui est possible.

Il ne reste plus qu'à calculer $\kappa = 1 - D \cdot X$.

On trouve $\kappa = \frac{4}{d} + \frac{8}{d'} - 2$.

Références

- [1] F. Kälberer M. Wardetzky, S. Mathur and E. Grinspun. *Discrete Laplace operators : no free lunch*. 2008.
- [2] Yann Ollivier. A survey of ricci curvature for metric spaces and markov chains. 2007.
- [3] Steiglitz K. Papadimitriou, C.H. *Combinatorial Optimization*. Dover, NewYork, 1998.
- [4] U. Pinkall and K. Polthier. Computing discrete minimal surfaces and their conjugates. *Experimental Mathematics*, 2(1) :15–36, 1993.
- [5] Shing-Tung Yau Yong Lin, Linyuan Lu. Ricci curvature of graphs. *Tohoku Math. J.*, (63) :605–627, 2011.