Exemple de construction par recollement de l'immeuble d'un groupe réductif quasi-déployé et non déployé de rang un

Benoit Loisel

3 avril 2015

Résumé

Notations préliminaires

On se donne une extension de corps locaux L/K quadratique galoisienne. On note ω la valuation discrète sur L. On note $\mathcal{O}_K$ et $\mathcal{O}_L$ les anneaux des entiers, κ_K et κ_L les corps résiduels, π_K et π_L des uniformisantes. On note τ l'élément non trivial du groupe $\mathrm{Gal}(L/K)$.

On note $\Gamma_K = \omega(K^\times)$ et $\Gamma_L = \omega(L^\times)$ les groupes de valeurs de la valuation.

On définit sur L^3 une forme hermitienne notée h par $h((X_{-1}, X_0, X_1), (Y_{-1}, Y_0, Y_1)) = X_{-1}{}^\tau Y_1 + X_0{}^\tau Y_0 + X_1{}^\tau Y_{-1}$. On pose $G = SU(h)$. C'est un K-groupe réductif quasi-déployé non déployé sur K et une K-forme de $SL_{3,L}$. En particulier, G est déployé sur L.

On choisit dans G un tore K-déployé maximal noté S. On note $T = \mathcal{Z}_G(S)$ le centralisateur de S dans G et $N = \mathcal{N}_G(S)$ le normalisateur de S dans G Comme G est quasi-déployé, T est un tore maximal de G.

1 Modèle d'appartement vide

1.1 Écriture dans $SL_{3,L}$

On identifie G au sous-groupes des matrices de $SL_{3,L}$ qui sont stables par l'action du groupe $\mathrm{Gal}(L/K)$ qui échange les deux racines simples.

Plus précisément, on choisit le tore S formé des matrices diagonales qui sont $\mathrm{Gal}(L/K)$-stables. On a un isomorphisme de K-groupes

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{a}: & L^\times & \xrightarrow{\simeq} & T \\ & v & \mapsto & \begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v^{-1}\cdot {}^\tau v & 0 \\ 0 & 0 & {}^\tau v^{-1} \end{pmatrix} \end{array}$$

dont la restriction à $K^\times = \mathbb{G}_{m,K}$ est un isomorphisme sur son image S. On a $S(K) = \widetilde{a}(K^\times)$ et $T(K) = \widetilde{a}(L^\times)$ et $T(K)_b = \widetilde{a}(\mathcal{O}_L^\times)$

Sur L, le groupe réductif $G_L \simeq SL_{3,L}$ est déployé et

$$T_L = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & t_1^{-1}\cdot t_2 & \\ & & t_2^{-1} \end{pmatrix} ; t_1, t_2 \in L^\times \right\}$$

en est un tore maximal L-déployé. $\widetilde{\Phi} = \Phi(G_L, T_L)$ est un système de racines de rang 2 de type A_2, de racines simples $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ échangées par l'action de τ sur les types des groupes paraboliques [BT65, §6]. Autrement dit, on a $\widetilde{\Phi} = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1+\alpha_2)\}$.

Explicitement, les racines simples s'expriment ainsi :

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & t_1^{-1}\cdot t_2 & \\ & & t_2^{-1} \end{pmatrix} = t_1^2 t_2^{-1} \text{ et } \alpha_2 \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & t_1^{-1}\cdot t_2 & \\ & & t_2^{-1} \end{pmatrix} = t_1^{-1} t_2^2$$

Sur K, on obtient le système de racines $\Phi = \Phi(G, S)$ en restreignant à S les racines de G_L par rapport à T_L. Ce qui donne :

$$a(\widetilde{a}(t)) = t = \alpha_1 \begin{pmatrix} t & & \\ & 1 & \\ & & t^{-1} \end{pmatrix} = \alpha_2 \begin{pmatrix} t & & \\ & 1 & \\ & & t^{-1} \end{pmatrix} \quad \forall t \in K^\times$$

Ce que l'on doit retenir, c'est que $a = \alpha_1|_S = \alpha_2|_S$ et $2a = (\alpha_1+\alpha_2)|_S$, que $\widetilde{a} = \frac{1}{2}a^\vee$ et que $\Phi = \{\pm a, \pm 2a\}$.

1.2 Caractères et cocaractères des tores

On trouve $X_*(S) = \mathbb{Z}\widetilde{a} = X_*(T)_K$ et $X^*(S) = \mathbb{Z}a$ et $X_*(T)_K = \mathbb{Z}(v \mapsto v^\tau v) = \mathbb{Z}(2a)$. En particulier, on retrouve bien que le groupe des caractères de T définis sur K s'identifie à un sous-groupe d'indice fini (ici d'indice deux) de $X^*(S)$.

On note $V_1 = X_*(T)_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Par dualité, on identifie les racines à des formes linéaires sur V_1

On a $V_0 = \bigcap_{b\in\Phi} \ker b = \{0\}$.

On identifie $V = V_1/V_0$ à $\mathbb{R}$ par la bijection suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & V \\ x & \mapsto & -\frac{1}{2}a^\vee \otimes x := \overrightarrow{x} \end{array}$$

de sorte que $a(\overrightarrow{x}) = -x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1.3 Structure d'espace affine pour l'appartement

Pour tout $z = \widetilde{a}(t) \in T(K)$, avec $t \in L^\times$, on définit par dualité un élément $e_z \in V$ vérifiant :

$$\forall \chi \in X^*(T)_K \; \langle \chi, e_z \rangle = -\omega(\chi(z))$$

Avec l'identification, on a $e_z = \overrightarrow{\omega(v)}$.

Le morphisme $\begin{array}{cccc} \nu : & T(K) & \to & V \\ & z & \mapsto & e_z \end{array}$ identifie les éléments du tore à aux translations d'un espace affine dont V est l'espace vectoriel sous-jacent.

On note $m_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on justifiera la notation a posteriori.

Par calcul, on obtient $N(K) = T(K) \cdot \{1, m_a\}$

On définit un espace affine, noté A, dirigé par V par le choix d'un morphisme structurel prolongeant ν

$$\nu : N(K) \to \mathrm{Aff}(A)$$

et d'un point-origine $\mathcal{O} \in A$ uniquement déterminé par la relation

$$\nu(m_a)(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$$

Si on note r_a la réflexion vectoriel de points fixes $\ker a = \{0\}$, alors ν est complètement décrit par

$$\forall v \in L^\times \, \forall \varepsilon \in \{0, 1\} \quad \nu(\widetilde{a}(v) m_a^\varepsilon)(\mathcal{O} + \overrightarrow{x}) = \mathcal{O} + r_a^\varepsilon(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{\omega(v)}$$

2 Murs de l'appartement

2.1 Paramétrage des groupes radiciels

On pose $H_0(L, K) = \{(u, v) \in L \times L, u^\tau u = v + {}^\tau v\}$. C'est un K-groupe isomorphe à $U_a(K)$ et $U_{-a}(K)$ respectivement via les isomorphismes $x_a(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & -{}^\tau u & -v \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $x_{-a}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ -v & -{}^\tau u & 1 \end{pmatrix}$

On pose $L_0 = \{v \in L, 0 = v + {}^\tau v\}$. C'est un K-groupe isomorphe à $U_{2a}(K)$ et $U_{-2a}(K)$ respectivement via les isomorphismes $x_{2a}(v) = x_a(0, v)$ et $x_{-2a}(v) = x_{-a}(0, v)$.

Ces paramétrages sont obtenus grâce aux restrictions de Weil de L à K d'un L-épinglage de Chevalley-Steinberg obtenu dans $G_L = SL_{3,L}$ (voir [Lan96, §4 p.43-44]).

2.2 Valuations réelles de DRG

On pose

$$\varphi_{\pm a}(x_{\pm a}(u, v)) = \frac{1}{2}\omega(v) \quad \forall (u, v) \in H_0(L, K)$$

$$\varphi_{\pm 2a}(x_{\pm 2a}(v) = \omega(v) \quad \forall v \in L_0$$

Ceci définit bien une valuation réelle de la donnée de groupes radicielle (voir [Lan96, §4] et [Rou08, 11.6]).

2.3 Murs de l'appartement

Étant donnés une racine $b \in \Phi$ et un élément $\mathbf{u} \in U_b(K)$, on sait qu'il existe des éléments $\mathbf{u}', \mathbf{u}'' \in U_{-b}(K)$ tels que $\mathbf{u}'\mathbf{u}\mathbf{u}'' \in N(K)$. De plus, $\mathbf{u}'$ et $\mathbf{u}''$ sont uniquement déterminés par $\mathbf{u}$. On note $m(\mathbf{u}) = \mathbf{u}'\mathbf{u}\mathbf{u}''$, cet élément de $N(K)$ ne dépend que de b et $\mathbf{u}$ (axiomes de donnée de groupes radicielle).

Explicitement, pour $(u,v) \in H_0(L,K)$ et $\mathbf{u} = x_a(u,v)$ il s'agit de $\mathbf{u}' = x_{-a}(uv^{-1}, {}^\tau v^{-1})$ et $\mathbf{u}'' = x_{-a}(u^\tau v^{-1}, {}^\tau v^{-1})$. On note alors $m(\mathbf{u}) = m_a(u,v)$. Remarquons que l'élément m_a du groupe $N(K)$ n'est pas nécessairement un élément de $U_{-a}(K)U_a(K)U_{-a}(K)$; il faudrait qu'il existe un élément $u \in L$ tel que $N_{L/K}(u) = 2$.

2.3.1 Lemme. *Par un calcul matriciel, on a*
- $m_a x_a(u,v) m_a = x_{-a}(u,v)$
- $m_a(u,v) = \widetilde{a}(v) m_a = m_a \widetilde{a}({}^\tau v^{-1})$

2.3.2 Définition. Par définition, un mur de A est une partie de A qui se réalise comme l'ensemble des points fixes d'une réflexion affine de A de la forme $\nu(m(\mathbf{u}))$ pour un $b \in \Phi$ et un $\mathbf{u} \in U_b(K)$.

On appelle groupe de Weyl affine, noté W_{aff}, le sous-groupe de $\mathrm{Aff}(A)$ engendré par les $\nu(m(\mathbf{u}))$ pour $b \in \Phi$ et $\mathbf{u} \in U_b(K)$.

Dans notre cas, les murs sont les points fixes des $\nu(m(\mathbf{u}))$ pour $\mathbf{u} \in U_a(K)$. Soit $(u,v) \in H_0(L,K)$ et $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\nu(m_a(u,v))(\mathcal{O} + \overrightarrow{x}) = \mathcal{O} + \overrightarrow{x} \iff \mathcal{O} + \overrightarrow{x} = \mathcal{O} - \overrightarrow{x} + \overrightarrow{\omega(v)} \iff x = \varphi_a(x_a(u,v))$$

2.3.3 Définition. On définit des ensembles de valeurs pour toute racine $b \in \Phi$ par

$$\Gamma_b = \varphi_b(U_b(K) \setminus \{1\})$$

$$\Gamma'_b = \{\varphi_b(\mathbf{u}),\, \mathbf{u} \in U_b(K) \setminus \{1\} \text{ et } \varphi_b(\mathbf{u}) = \sup \varphi_b(\mathbf{u} U_{2b}(K))\}$$

Les murs sont donc exactement les $\mathcal{O} + \overrightarrow{x}$ pour $x \in \Gamma_a$. On est donc naturellement amené à calculer ces ensembles.

2.4 Ensembles de valeurs

Le calcul des Γ'_b pour tout $b \in \Phi$ sera fait ultérieurement. Il va permettre de montrer que $\Gamma_a = \Gamma'_a \cup \frac{1}{2}\Gamma'_{2a}$ et que $\Gamma_a = \frac{1}{2}\Gamma_L$. Ainsi, $\nu(\widetilde{a}(\pi_L))$ est une translation de pas minimal de W_{aff}.

2.5 Racines affines

2.5.1 Définition. Pour tout $l \in \mathbb{R}$, tout $b \in \Phi$, on définit sur A une application affine $\theta_{b,l}$ par $\theta_{b,l}(\mathcal{O} + \overrightarrow{x}) = b(\overrightarrow{x}) + l$.

On appelle racine affine une application affine $\theta : A \to \mathbb{R}$ de la forme $\theta = \theta_{b,l}$ pour un certain $b \in \Phi$ et $l \in \Gamma'_b$.

On note Φ_{aff} l'ensemble des racines affines.

2.5.2 Proposition. *[Tit79, 1.6 et 1.7] L'ensemble des racines affines constitue un système de racines affines de groupe de Weyl affine isomorphe à W_{aff}.*

2.5.3 Proposition. *Une partie X est un mur de A si et seulement s'il existe une racine $b \in \Phi$ une valeur $l \in \Gamma'_b$ telles que $X = \theta_{b,l}^{-1}(0)$*

Autrement dit, les murs sont exactement les lieux d'annulation des racines affines.

Démonstration. X est un mur si et seulement s'il s'écrit $\mathcal{O} + \overrightarrow{x}$ avec $x \in \Gamma_a$. Si $x \in \Gamma'_a$, alors $\theta_{a,x}$ convient. Sinon, $x \in \frac{1}{2}\Gamma'_{2a}$, donc $\theta_{2a,2x}$ convient.

Réciproquement, pour tout $b \in \Phi$ et tout $l \in \Gamma'_b$, on a $\theta_{b,l} = -\theta_{-b,-l}$. Donc on peut supposer $b \in \Phi^+$. Soit $X = \theta_{b,l}^{-1}(0) = \mathcal{O} + \overrightarrow{x}$. Si $b = a$, alors $0 = l - x$ donc $x \in \Gamma'_a$. Comme $\Gamma'_a \subset \Gamma_a$, on a le résultat. Si $b = 2a$, alors $0 = l - 2x$ donc $x \in \frac{1}{2}\Gamma'_{2a} \subset \Gamma_a$. D'où le résultat. □

2.5.4 Définition. Un demi-appartement de A est une partie de A de la forme $\theta^{-1}([0, +\infty[)$ où θ est une racine affine. On le note alors $D(\theta)$.

Il est clair que la frontière $\partial D(\theta)$ d'un demi-appartement de A est un mur de A.

3 Description de l'immeuble

3.1 Recollement d'appartements

On dispose sur $G(K) \times A$ d'une relation d'équivalence [Lan96, 9.1] définie par

$$(g, x) \sim (h, y) \Longleftrightarrow \exists n \in N(K) \left\{ \begin{array}{l} y = \nu(n)(x) \\ g^{-1}hn \in U_{\{x\}} \end{array} \right.$$

L'immeuble de Bruhat-Tits de $G(K)$ est défini par

$$X(G) = \frac{G(K) \times A}{\sim}$$

En recollant des appartements qui sont des droites affines, l'immeuble de $G = SU(h)$ se réalise donc topologiquement comme un arbre dont les sommets sont c murs des appartements. On cherche désormais à savoir quelle est la valence de ces sommets.

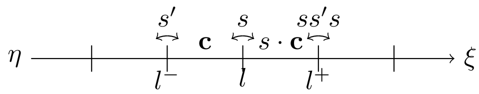
3.2 Valence d'un sommet déduite des groupes radiciels

Notons $[g : x]$ la classe de $(g, x) \in G(K) \times A$ modulo la relation $\sim$ et $\begin{array}{rccc} \iota : & A & \to & X(G) \\ & x & \mapsto & [1 : x] \end{array}$ l'application injective [Lan96, 9.2] qui envoie A sur l'appartement standart $\mathbb{A} = \iota(A)$.

Soit $l \in \Gamma_a$. On note $l^+ = \Gamma_a \cap]l, +\infty[$ et $l^- = \Gamma_a \cap] - \infty, l[$.

Choisissons $\mathbf{c} = \{[1 : x], l^- < x < l\}$ une alcôve de $\mathbb{A}$. Le groupe de Weyl affine est engendré par deux réflexions, disons s et s', par rapport aux murs $\mathcal{O} + \overrightarrow{l^-}$ et $\mathcal{O} + \overrightarrow{l}$ de A respectivement.

Notons ξ le point à l'infini de l'appartement A tel que $U_a(K) \cdot \xi = \xi$. C'est le point fixé par tous les $U_{a,l}$ pour $l \in \mathbb{R}$. Notons η le point à l'infini de l'appartement A tel que $U_{-a}(K) \cdot \eta = \eta$.



Pour connaître la valence du sommet $\mathcal{O} + \overrightarrow{l} \in A$ que l'on voit comme un élément de l'immeuble $X(G)$, on fait agir $G(K)$ sur $X(G)$ et, par forte transitivité, il suffira de trouver toutes les images possibles de l'alcôve $s \cdot \mathbf{c}$ par les éléments du groupe fixant l'alcôve $\mathbf{c}$ point par point.

Complément sur les racines affines et action des groupes radiciels sur l'immeuble

3.2.1 Définition. À tout élément non trivial d'un groupe radiciel, on associe une racine affine pour $b \in \Phi$ et $\mathbf{u} \in U_b(K) \setminus \{1\}$ en posant $\theta(b, \mathbf{u}) = \theta_{b,\varphi_b(\mathbf{u})} = b + \varphi_b(\mathbf{u})$.

À toute application affine θ, on associe une partie de $G(K)$, notée U_θ définie par $U_\theta = \{1\} \cup \{\mathbf{u} \in U_b(K)\,,\, b \in \Phi \text{ et } \theta(b, \mathbf{u}) \geq \theta\}$ C'est un sous-groupe de $G(K)$.

Les U_θ correspondent à des termes de filtrations des groupes radiciels. En particuliers, U_θ est le groupe trivial si la partie vectorielle de θ n'est pas une racine sphérique. De plus, on retrouve $U_{\theta(b,\mathbf{u})} = U_{b,\varphi_b(\mathbf{u})}$

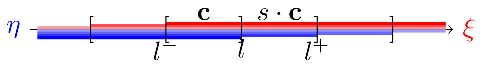
On note $\mathbb{D}(b, l) = \{[1 : x] \in \mathbb{A}\,,\, \theta_{b,l}(x) \geq 0\}$ les demi-appartements de $\mathbb{A}$.

3.2.2 Proposition. *Pour toute racine $b \in \Phi$ et toute valeur $l \in \Gamma_b$, on a* $\mathbb{D}(b, l) = \{x \in \mathbb{A}\,,\, \forall \mathbf{u} \in U_{b,l}\; \mathbf{u} \cdot x = x\}$

Autrement dit, l'ensemble des points fixés par un élément $\mathbf{u} \in U_{b,l} \setminus U_{b,l^+}$ est exactement le demi-appartement $\mathbb{D}(b, l)$. Dans l'immeuble $X(G)$, un tel élément $\mathbf{u}$ agit donc en fixant un demi-appartement et envoie le complémentaire par pliage dans le demi-appartement d'un appartement différent de $\mathbb{A}$ [Lan96, 9.3(ii)].

Retour au calcul de la valence en l

Dans A, les groupes radiciels $U_{a,l'}$ fixent $\mathbf{c}$ si et seulement si $l' \geq -l^-$ et les groupes radiciels $U_{-a,l''}$ fixent $\mathbf{c}$ si et seulement si $l'' \geq l$.



En rouge sur le dessin ci-dessus, les demi-appartements contenant $\mathbf{c}$ fixés par les $U_{a,l'}$ et en bleu ceux contenant $\mathbf{c}$ et fixés par les $U_{-a,l''}$.

On pose $B = \mathrm{Stab}_{G(K)}(\mathbf{c})$. Comme l'action du groupe préserve le type des facettes, le stabilisateur est un stabilisateur point par point. On admet que

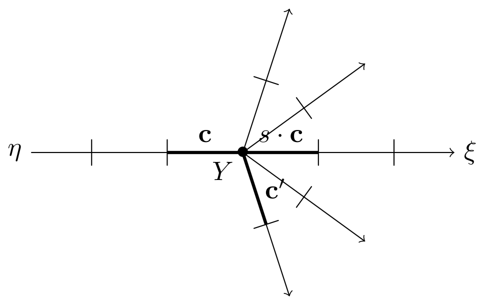
3.2.3 Proposition. *B se décompose en $B = U_{-a,l} \cdot U_{a,-l^-} \cdot T(K)_b$*

Notons Y le sommet $[1 : \mathcal{O} + \overrightarrow{l}] \in X(G)$.

3.2.4 Lemme. *La valence du sommet Y est égale au nombre d'éléments de la $B \times B$ orbite de s modulo B plus un.*

Démonstration. Un élément $b \in B$ opère sur $X(G)$, fixe $\mathbf{c}$ et envoie $s \cdot \mathbf{c}$ sur une alcôve $\mathbf{c}'$, distincte de $\mathbf{c}$, telle que le sommet Y est commun à $\mathbf{c}$, à $\mathbf{c}'$ et à $s \cdot \mathbf{c}$.

Réciproquement, soit $\mathbf{c}'$ une alcôve distincte de $\mathbf{c}$, telle que le sommet Y est commun à $\mathbf{c}$, à $\mathbf{c}'$ et à $s \cdot \mathbf{c}$. Par le premier axiome des systèmes d'appartements, il existe un appartement $\mathbb{A}'$ contenant $\mathbf{c}$ et $\mathbf{c}'$. Par forte transitivité de $G(K)$ sur $X(G)$, il existe un élément $g \in G(K)$ tel que $g\mathbb{A}' = \mathbb{A}$ et $g \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c}$. En particulier, $g \in B$ et $g \cdot \mathbf{c}' = s \cdot \mathbf{c}$.



Les alcôves de $X(G)$ voisines de $\mathbf{c}$ par le sommet Y sont donc exactement celles de la forme $bn_sb'\cdot\mathbf{c}$ où $n_s \in N(K)$ relève l'élément du groupe de Weyl affine s. Deux telles alcôves $b_1n_sb'_1\mathbf{c}$ et $b_2n_sb'_2\mathbf{c}$ sont identiques si et seulement si $b_1n_sB = b_2n_sB$. La valence de Y est donc égale à $1 + \mathrm{Card}(BsB/B)$ $\square$

Plus précisément, $Bs\cdot\mathbf{c} = U_{-a,l}U_{a,-l^-}T(K)_bs\mathbf{c} = U_{-a,l}s\mathbf{c}$.
Or $U_{-a,l^+}s\mathbf{c} = s\mathbf{c}$
Donc la valence de Y est exactement $\mathrm{Card}(U_{-a,l}/U_{-a,l^+}) + 1$.

On constate que l'on est amené à calculer le nombre d'élément des groupes quotients $U_{a,l}/U_{a,l^+}$ pour $l \in \Gamma_a$.

3.3 Calcul de la valence en fonction de la ramification

Pour $b \in \Phi$ et $l \in \Gamma_b$, notons $X_{b,l} = U_{b,l}/U_{b,l^+}$

3.3.1 Proposition. *[Tit79, 1.6] $X_{b,l}$ est un κ_K-espace vectoriel.*
$X_{2b,2l}$ est un sous-κ_K-espace vectoriel de $X_{b,l}$

Démonstration. On rappelle que pour $(u,v),(u',v') \in H_0(L,K)$ on a $x_a(u,v)\cdot x_a(u',v') = x_a(u+u', v+v'+u^\tau u')$ et $x_a(u,v)^{-1} = x_a(-u, u^\tau u - v)$.

U_{a,l^+} est un sous-groupe distingué de $U_{a,l}$. En effet, pour $(u,v),(u',v') \in H_0(L,K)$ avec $\frac{1}{2}\omega(v) \geq l$ et $\frac{1}{2}\omega(v) > l$, on a $x_a(u',v')x_a(u,v)x_a(u',v')^{-1} = x_a(u',v')x_a(u-u', v-v'-u^\tau u' + u'^\tau u') = x_a(u, v+u'^\tau u - u^\tau u' + u'^\tau u')$
Or $2\omega(u) \geq \min(\omega(v), \omega({}^\tau v)) = \omega(v) \geq 2l$ et $2\omega(u') \geq \min(\omega(v'), \omega({}^\tau v')) = \omega(v) > 2l$ Donc $\omega(v + u'^\tau u - u^\tau u' + u'^\tau u') \geq \min(v, 2\omega(u'), \omega(u)+\omega(u')) \geq 2l$

De même, U_{2a,l^+} est un sous-groupe distingué de $U_{2a,l}$.

$U_{2a,2l}$ est un sous-groupe de $U_{a,l}$ et le morphisme de groupes canonique $U_{2a,2l} \to X_{a,l}$ a pour noyau $U_{2a,2l^+}$. Donc $X_{2a,2l}$ est un sous-κ_K-espace vectoriel de $X_{a,l}$. $\square$

3.3.2 Remarque. Plus précisément, on montre que $X_{a,l} = \mathfrak{U}_{a,l}(\kappa_K)$ est un κ_L espace-vectoriel de dimension un [Tit79, 3.5.1 et 1.15].

On pose $d(b,l) = \dim_{\kappa_K} X_{b,l}/X_{2b,2l}$.

3.3.3 Proposition. *Notons $q = \mathrm{Card}\kappa_K$. La valence du sommet Y défini précédemment est $1 + q^{d(a,l)+d(2a,2l)}$.*

Démonstration. En effet, $\mathrm{Card}X_{a,l} = \mathrm{Card}X_{a,l}/X_{2a,2l} + \mathrm{Card}X_{2a,2l}/X_{4a,4l} = qd(a,l) + qd(2a,2l)$ $\square$

3.3.4 Lemme. *$d(b,l) > 0$ si et seulement si $l \in \Gamma'_b$*

Démonstration.

$$\begin{aligned} l \in \Gamma'_b &\Leftrightarrow \exists \mathbf{u} \in U_b(K)\, \varphi_b(\mathbf{u}) = l = \sup \varphi_b(\mathbf{u}U_{2b}(K)) \\ &\Leftrightarrow \exists \mathbf{u} \in U_b(K)\, \varphi_b(\mathbf{u}) = l \text{ et } \forall \mathbf{u}'' \in U_{2b}(K)\, \varphi_b(\mathbf{u}\mathbf{u}'') < l^+ \\ &\Leftrightarrow U_{b,l} \neq U_{b,l^+} \text{ et } \exists \mathbf{u} \in U_{b,l}\, \forall \mathbf{u}'' \in U_{2b}(K)\, \mathbf{u}\mathbf{u}'' \notin U_{b,l^+} \\ &\Leftrightarrow X_{b,l} \neq 0 \text{ et } X_{b,l} \neq X_{2b,2l} \\ &\Leftrightarrow d(b,l) \neq 0 \end{aligned}$$

$\square$

On a donc besoin de calculer les Γ'_b

On définit des ensembles utiles pour ce calcul. On note

$$L_0 = \{v \in L\,,\, v + {}^\tau v = 0\}$$

$$L_1 = \{v \in L\,,\, v + {}^\tau v = 1\}$$

$$L_1^{\max} = \{v \in L_1\,,\, \omega(v) = \sup \omega(L_1)\}$$

Lemmes techniques

Le but de ce paragraphe est de montrer que $L_1^{\max}$ est non vide.

3.3.5 Lemme. *[BT84, 4.3.3] Il existe des éléments $t \in L$, $r, s \in K$ tels que $K[t] = L$ et $t^2 = rt - s$ vérifiant les propriétés :*

- *Si L/K est non ramifiée, $\omega(s) = 0$.*
- *Si L/K est ramifiée, s est une uniformisante de K.*
- *$r = 0$ ou $\omega(s) \leq \omega(r) < \omega(2)$ ou $0 < \omega(s) \leq \omega(r) = \omega(2)$*

Démonstration. Si L/K est non ramifiée, on a $\omega(\pi_L) = \omega(\pi_K)$ et $[\kappa_L : \kappa_K] = 2$. Soit $t \in \mathcal{O}_L$ tel que $\bar{t} = t \mod \pi_L\mathcal{O}_L \in \kappa_L$ vérifie $\kappa_K[\bar{t}] = \kappa_L$. On a donc $K[t] = L$ et on écrit $t^2 - rt + s = 0$. Remarquons que $s = N_{L/K}(t)$ et $r = \mathrm{Tr}_{L/K}(t)$. En particulier, $s, r \in \mathcal{O}_K$. On a $\omega(s) = 2\omega(t) = 0$. Si $r \neq 0$ et $\omega(r) \geq \omega(2)$, en particulier $\mathrm{car}(K) \neq 2$ et $\frac{r}{2} \in \mathcal{O}_K$. On pose $t' = t - \frac{r}{2} \in \mathcal{O}_L$. Ceci change r en $r' = 0$ et s en $s' = s - \frac{r^2}{4}$ et $\omega(s') = 2\omega(t') = 0$ reste vrai.

Si L/K est ramifiée, on a $\omega(\pi_L) = \frac{1}{2}\omega(\pi_K)$ et $[\kappa_L : \kappa_K] = 1$. On pose $t = \pi_L$. On a bien $K[t] = L$ et on écrit $t^2 - rt + s = 0$. Remarquons que $s = N_{L/K}(t)$ et $r = \mathrm{Tr}_{L/K}(t)$. On a bien $\omega(s) = 2\omega(t) = 2\omega(\pi_L) = \omega(\pi_K)$. Donc s est une uniformisante de K. Si $r \neq 0$ et $\omega(r) > \omega(2)$, en particulier $\mathrm{car}(K) \neq 2$ et $\frac{r}{2} \in \mathcal{O}_K$, donc $\omega(\frac{r}{2}) > \omega(t)$. On pose $t' = t - \frac{r}{2} \in \mathcal{O}_L$. $\omega(t') = \min(\omega(t), \omega(\frac{r}{2}) = \omega(t)$ car on est dans le cas d'égalité étant donné que c'est une somme de deux termes de valuations distinctes. Cela change r en $r' = 0$ et s en $s' = s - \frac{r^2}{4}$ qui conviennent alors. $\square$

3.3.6 Remarque. Si $\mathrm{car}(K) = 2$, alors $r \neq 0$ sinon on contredirait la séparabilité de l'extension L/K.

3.3.7 Lemme. *Si $r = 0$, on a $L_0 = tK$ et $L_1 = \frac{1}{2} + tK$ et $\frac{1}{2} \in L_1^{\max}$.*

Si $r \neq 0$, on a $L_0 = (1 - 2tr^{-1})K$ et $L_1 = tr^{-1} + (1 - 2tr^{-1})K$ et $tr^{-1} \in L_1^{\max}$.

Démonstration. Écrire $x = at + b$ avec $a, b \in K$ donne les résultats pour L_0 et L_1.

Remarquons que $\forall x, y \in K\, \omega(x + ty) = \min(\omega(x), \omega(t) + \omega(y))$. En effet, si L/K et ramifiée, on a $\omega(ty) \neq \omega(x)$. Si L/K est non ramifiée, si $\omega(x) < \omega(y)$ c'est bon. Sinon, $\omega(x) \geq \omega(y)$ donc $xy^{-1} \in \mathcal{O}_K$. Si par l'absurde $\omega(t + xy^{-1}) > \min(\omega(t), \omega(x) - \omega(y))$, alors $t + xy^{-1} \in \pi_L\mathcal{O}_L$. Donc t et xy^{-1} ont même image dans κ_L. Contradiction avec $t \notin \mathcal{O}_K$.

Lorsque $r = 0$, on a $\forall x \in K\, \omega(\frac{1}{2} + tx) = \min(\omega(\frac{1}{2}), \omega(t) + \omega(x)) \leq \omega(\frac{1}{2})$. D'où le résultat.

Lorsque $r \neq 0$, on a pour tout $x \in K$,

$$\begin{array}{rcl}\omega(tr^{-1} + (1 - 2tr^{-1})x) & = & \omega(x + t(r^{-1} - 2r^{-1}x)) \\ & = & \min(\omega(x), \omega(tr^{-1}) + \omega(1 - 2x)) \\ & \leq & \omega(tr^{-1})\end{array}$$

Sinon, on aurait $\omega(x) > \omega(tr^{-1})$ et $\omega(1-2x) > 0$. Comme $\omega(1) = 0$, on aurait donc $0 = \omega(2x) = \omega(x) + \omega(2)$. Donc $-\omega(x) = \omega(2) < \omega(rt^{-1})$. Contradiction avec les hypothèses faites sur r et t. $\square$

Calcul des ensembles de valeurs

On sait désormais que $L_1^{\max}$ est non vide. Notons $\delta = \sup \omega(L_1^{\max})$ et choisissons $\lambda \in L_1^{\max}$.

3.3.8 Proposition.
- *Si L/K est non ramifiée, on a $\Gamma'_{2a} = \Gamma_K$.*
- *Si L/K est ramifiée, on a $\Gamma'_{2a} = \delta + \omega(\pi_L) + \Gamma_K$.*

Démonstration. On sait par le lemme 3.3.7 que $\Gamma'_{2a} = \omega(L_0^\times) \subset \Gamma_L$ et que L_0 est un K-espace vectoriel de dimension un. Donc Γ'_{2a} s'écrit $\omega_0 + \Gamma_K$ avec $\omega_0 \in \Gamma_L$ à déterminer.

Le cas non ramifié découle du fait que $\Gamma_L = \Gamma_K$.

Dans le cas ramifié, on montre que $\delta \notin \Gamma'_{2a}$. Par l'absurde, supposons que $\delta \in \Gamma'_{2a}$. Par définition de Γ'_{2a}, il existerait $y \in L_0$ tel que $\delta = \omega(y)$. Par définition de δ, il existe $x \in L_1$ tel que $\delta = \omega(x)$. Donc $\omega(xy^{-1}) = 0$. Comme L/K est ramifiée, il existe $z \in \mathcal{O}_K^\times$ tel que $xy^{-1} = z \mod \pi_L \mathcal{O}_K$. On pose $y' = yz \in L_0$ de sorte que $\omega(xy^{-1} - z) = \omega(x(y')^{-1} - 1) > 0$. Comme $x + y' \in L_1$, on a $\omega(x + y') = \omega(y') + \omega(xy'^{-1} - 1) > \delta$. Contradiction avec la maximalité de δ.

$\square$

3.3.9 Lemme. *Si $\lambda \in L_1^{\max}$ alors pour tout $x \in K$ et tout $y \in L_0$, on a $\omega(x\lambda + y) = \min(\omega(y), \omega(x\lambda))$.*

Démonstration. Si $x = 0$, c'est vrai.

Supposons désormais $x \in K^\times$. Alors $\lambda + yx^{-1} \in L_1$. Donc par définition de $L_1^{\max}$, on a $\omega(\lambda) \geq \omega(\lambda + yx^{-1})$. Donc $\omega(x\lambda) \geq \omega(x\lambda + y)$
De plus, $\omega(y) = \omega(y + x\lambda - x\lambda) \geq \min(\omega(y + x\lambda), \omega(-x\lambda) = \omega(y + x\lambda)$ car $\omega(-x\lambda) \geq \omega(x\lambda) \geq \omega(x\lambda + y)$
Donc $\min(\omega(y), \omega(x\lambda)) = \omega(y + x\lambda)$. $\square$

3.3.10 Proposition. *On a $\Gamma'_a = \frac{1}{2}\delta + \Gamma_L$*

Démonstration. Soit $(u, v) \in H_0(L, K)$ tel que $\varphi_a(x_a(u, v)) = \sup \varphi_a(x_a(u, v)U_{2a}(K))$.

Fixons un $\lambda \in L_1^{\max}$. On remarque que $(u, \lambda u^\tau u) \in H_0(L, K)$ et $v - \lambda u^\tau u \in L_0$ avec $u^\tau u \in K$. Pour tout $v' \in L_0$, on applique le lemme 3.3.9 à $v + v'$

$$\begin{aligned} \omega(v + v') &= \omega((v + v' - \lambda u^\tau u) + \lambda(u^\tau u)) \\ &= \min(\omega(v + v' - \lambda u^\tau u), \delta + 2\omega(u)) \\ &\leq \delta + 2\omega(u) \end{aligned}$$

avec égalité pour $v' = \lambda u^\tau u - v \in L_0$. Donc $\omega(v) = 2\varphi_a(x_a(u, v)) = \delta + 2\omega(u)$. Donc $\Gamma'_a \subset \frac{1}{2}\delta + \Gamma_L$

Réciproquement, pour tout $u \in L^\times$, on a $(u, \lambda u^\tau u) \in H_0(L, K)$
et $\mathbf{u} = x_a(u, v)$ vérifie bien $\varphi_a(\mathbf{u}) = \sup \varphi_a(\mathbf{u}U_{2a}(K))$

D'où le résultat $\Gamma'_a = \frac{1}{2}\delta + \Gamma_L$. $\square$

On énonce le résultat mentionné plus haut concernant la répartition des murs.

3.3.11 Proposition.

(1) $\Gamma_a = \Gamma'_a \cup \frac{1}{2}\Gamma'_{2a}$

(2) $\Gamma_a = \frac{1}{2}\Gamma_L$

3.3.12 Remarque. Dans le calcul de la valence, seul le point (1) est utile. Le point (2) indique la répartition des murs et sert surtout si l'on est en train de regarder l'immeuble d'un groupe de dimension supérieur dans la direction a. Dans les notations de Bruhat et Tits, il faut l'interpréter $K = L_{2a}$ et $L = L_a$. On en déduit que deux murs consécutifs sont distants d'une « demi-uniformisante » et que donc la translation minimale du groupe de Weyl affine est donnée par un élément du tore maximal $T(K)$ de la forme $\widetilde{a}(\pi_L)t$ où $t \in T(K)_b$. Tout le tore $T(K)$ ne s'écrit pas comme produit de $m(\mathbf{u})$ mais l'écart à une telle écriture est contenu dans $T(K)_b$.

Démonstration. (1) Par définition, $\Gamma'_a \subset \Gamma_a$ et

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}\Gamma'_{2a} & = & \{\frac{1}{2}\varphi_{2a}(x_{2a}(v))\,,\, v \in L_0\} \\ & = & \{\varphi_a(x_a(0,v))\,,\, v \in L_0\} \\ & \subset & \Gamma_a \end{array}$$

Donc $\frac{1}{2}\Gamma'_{2a} \cup \Gamma'_a \subset \Gamma_a$.

Réciproquement, soit $(u,v) \in H_0(L,K)$ et $\lambda \in L_1^{\max}$. On a $u^\tau u \in K$ et $(u, \lambda u^\tau u) \in H_0(L,K)$. On pose $v' = v - \lambda u^\tau u \in L_0$. On peut écrire $x_a(u,v) = x_a(u, \lambda u^\tau u) x_a(0,v')$.

Si $u = 0$, alors $\varphi_a(x_a(0,v)) \in \Gamma_{2a} = \Gamma'_{2a}$.

Si $u \neq 0$, alors pour tout $v' \in L_0$, on a

$$\begin{array}{rcl} \varphi_a(x_a(u,v)x_{2a}(v')) & = & \varphi_a(x_a(u, v+v') \\ & = & \frac{1}{2}\omega(v+v') \\ & = & \frac{1}{2}\omega((u^\tau u)\lambda + (v + v' - \lambda u^\tau u)) \\ & = & \frac{1}{2}\min(\omega(v+v'-\lambda u^\tau u), \omega(\lambda) + 2\omega(u)) \end{array}$$

Les trois premières égalités sont élémentaires, la dernière est une conséquence du lemme 3.3.9.

On constate que le $\sup\{\varphi_a(x_a(u,v)\mathbf{u}')\,,\, \mathbf{u}' \in U_{2a}(K)\}$ est atteint en $\mathbf{u}' = x_{2a}(v')$ et vaut $\delta + 2\omega(u)$.

Si $\varphi_a(x_a(u,v)) \notin \Gamma'_a$, alors on a nécessairement $\frac{1}{2}(\delta + 2\omega(u)) = \varphi_a(x_a(u,v)x_a(0,v')) > \varphi_a(x_a(u,v)) = \frac{1}{2}\omega(v)$. Donc $\varphi_a(x_a(u,v)) = \frac{1}{2}\omega(v - \lambda u^\tau u) = \frac{1}{2}\omega(-v') \in \frac{1}{2}\omega(L_0^\times)$. Donc $\varphi_a(x_a(u,v)) \in \frac{1}{2}\Gamma'_{2a}$.

(2) On le montre par double inclusion.

L'inclusion $\Gamma_a \subset \frac{1}{2}\Gamma_L$ est claire par l'écriture $\varphi_a(x_a(u,v)) = \frac{1}{2}\omega(v)$ avec $(u,v) \in H_0(L,K) \subset L \times L$.

Si L/K est non ramifiée, on a $\Gamma_{2a} = \Gamma_K = \Gamma_L$ car L_0 est un K-espace vectoriel de dimension un. Donc $\frac{1}{2}\Gamma_L = \frac{1}{2}\Gamma'_{2a} \subset \Gamma_a$ donne l'autre inclusion.

Si L/K est ramifiée, on a montré que $\Gamma'_a = \frac{1}{2}\delta + \Gamma_L$ et que $\frac{1}{2}\Gamma'_{2a} = \frac{1}{2}(\delta + \omega(\pi_L) + \Gamma_K)$. En appliquant (1), on a le résultat.

□

3.3.13 Remarque. Dans la disjonction de cas, on constate aussi que l'union $\Gamma_a = \Gamma'_a \cup \Gamma'_{2a}$ est disjointe si et seulement si l'extension L/K est ramifiée.

Résultat

3.3.14 Proposition. *Si l'extension L/K est non ramifiée, l'arbre $X(G)$ est semi-homogène de valences $1+q$ et $1+q^3$.*

Si l'extension L/K est ramifiée, l'arbre $X(G)$ est homogène de valence $1+q$.

Démonstration. Soit $l \in \Gamma_a$.

- Si $l \notin \Gamma'_a$, alors $d(a,l) = 0$ et $d(2a, 2l) = 1$.
- Sinon, $l \in \Gamma'_a$.
  - Si L/K est ramifiée, l'union $\Gamma_a = \Gamma'_a \cup \Gamma'_{2a}$ est disjointe donc $2l \notin \Gamma'_{2a}$. Donc $d(2a, 2l) = 0$ et $d(a,l) = 1$.
  - Si L/K est non ramifiée, alors $\Gamma_a = \frac{1}{2}\Gamma_L = \frac{1}{2}\Gamma'_{2a}$ donc $2l \in \Gamma'_{2a}$. On en déduit que $d(a,l) = 2$ et $d(2a, 2l) = 1$.

Enfin, $\Gamma'_a = \frac{1}{2}\delta + \Gamma_L \neq \frac{1}{2}\Gamma_L = \Gamma_a$ que l'extension L/K soit ramifiée ou non. Ce qui conclut. $\square$

Table des matières

Références

[BT65] Armand Borel and Jacques Tits. Groupes réductifs. *Publications Mathématiques de L'IHÉS*, 27, 1965.

[BT84] F. Bruhat and J. Tits. *Groupes réductifs sur un corps local II.* Springer-Verlag, 1984.

[Lan96] Erasmus Landvogt. *A compactification of the Bruhat-Tits building.* Lecture notes in mathematics 1619. Springer, 1 edition, 1996.

[Rou08] Guy Rousseau. Euclidean buildings. In *Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidité*, volume 18, pages 77–116. Société Mathématique de France, 2008.

[Tit79] J. Tits. Reductive groups over local fields. *Proceedings of Symposia in pure mathematics*, 1979.