Modèles entiers du groupe

Benoit Loisel

17 avril 2015

Résumé

Cadre général

- K désigne un corps muni d'une valuation discrète notée ω pour laquelle il est complet et strictement Hensélien.
- G est un groupe réductif quasi-déployé sur K
- S est un tore K-déployé maximal de G et $T = \mathcal{Z}_G(S)$ est un tore maximal de G
- $\widetilde{K}/K$ est une extension finie galoisienne déployant le groupe réductif G

Corps résiduel

On note $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K et on choisit π_K une uniformisante de K. On note κ le corps résiduel de K. Pour appliquer le principe d'extension, on a besoin de supposer κ algébriquement clos, ce qui est le cas si l'on voit K comme l'Hensélianisé strict d'un corps local. On peut en fait se passer de cette hypothèse en utilisant les constructions explicites des modèles entiers de tores et de groupes radiciels faites par Bruhat et Tits.

Position de l'exposé

On a explicité l'existence de modèles de Néron faibles des tores (exposé de Giancarlo Arteche), de modèles entiers des groupes radiciels (exposé de Benoit Loisel) et de modèles entiers pour la grosse cellule sur lesquels ont dispose de lois de groupes birationnelles (exposé de Guy Rousseau). En choisissant un $\mathcal{O}_K$-schéma convenable et muni d'une loi de groupe birationnelle, on sait qu'il existe un $\mathcal{O}_K$-schéma en groupes qui le contient et prolonge la lois (exposé de David Harari).

1 Modèles entiers du groupe

1.1 Rappels des résultats précédents

Sur K, on note $\Phi = \Phi(G, S)$ le système de racines de G par rapport à S et sur $\widetilde{K}$, on note $\widetilde{\Phi} = \Phi(G_{\widetilde{K}}, T_{\widetilde{K}})$. On dispose d'un épinglage de Chevalley-Steinberg noté $(x_a)_{a\in\Phi}$ et d'une valuation réelle de la donnée de groupes radicielle associée notée $(\varphi_a)_{a\in\Phi}$ On a défini un espace affine A dirigé par $V = X_*(T)_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\bigcap_{a\in\Phi} \ker a$ qui sert de support à l'appartement et d'une origine $\mathcal{O} \in A$ qui permet de voir les racines comme des applications affines $a : A \to \mathbb{R}$ auxquelles on associe des demi-appartements.

Soit $\Omega \subset A$ une partie bornée non vide. On a défini une application
$$f_\Omega : \begin{array}{ccc} \Phi & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & \sup(-a(\Omega)) \end{array}$$

On a défini des $\mathcal{O}_K$-formes des tores S et T notées $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}$ respectivement. On a défini des $\mathcal{O}_K$-formes des groupes radiciels notées $\mathfrak{U}_{a,l}$ pour $a \in \Phi$ et $l \in \mathbb{R}$, vérifiant $\mathfrak{U}_{a,l}(\mathcal{O}_K) = U_{a,l} = \varphi_a^{-1}([l, +\infty])$. On note $\mathfrak{U}_{a,f_\Omega(a)} = \mathfrak{U}_{a,f_\Omega} = \mathfrak{U}_{a,\Omega}$ En utilisant les relations de commutation des groupes radiciels, on a défini des $\mathcal{O}_K$-schéma en groupes notés $\mathfrak{U}_{\Psi,\Omega}$ pour $\Psi \subset \Phi^\pm$ une partie close. On note $\mathfrak{U}_\Omega^\pm = \mathfrak{U}_{\Phi^\pm,\Omega}$. On a défini des $\mathcal{O}_K$-schéma notés $\mathfrak{X}_\Omega = \mathfrak{U}_\Omega^- \mathfrak{T} \mathfrak{U}_\Omega^+$ de fibre générique U^-TU^+ la grosse cellule de G (par rapport au tore T et à l'ordre Φ^+). Grâce aux algèbres de distributions, on établit le

1.1.1 Théorème (Cor 5.5 de l'exposé de Guy Rousseau)**.** *Les lois multiplication $m : G \times G \to G$ et inverse $i : G \to G$ se restreignent-étendent en des lois de groupes birationnelles sur des ouverts standards notées $m : (\mathfrak{X}_\Omega \times \mathfrak{X}_\Omega)_g \dashrightarrow \mathfrak{X}_\Omega$ et $i : (\mathfrak{X}_\Omega)_h \dashrightarrow \mathfrak{X}_\Omega$ respectivement.*

On peut alors étendre $\mathfrak{X}_\Omega$ en un $\mathcal{O}_K$-schéma en groupe, mais on n'a alors pas de contrôle sur sa fibre générique pour laquelle on souhaiterait prescrire G.

On s'appuie sur le théorème suivant dont il existe un énoncé plus général

1.1.2 Théorème ([?, 5.1 Thm 5])**.** *Soit R un anneau de valuation discrète. On note $K = \mathrm{Frac}(R)$ et $S = \mathrm{Spec}(R)$. Soit $\mathcal{X}$ un S-schéma séparé, lisse, fidèlement plat, de type fini muni d'une loi de groupe birationnelle notée $m : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \dashrightarrow \mathcal{X}$ et dont la fibre générique $\mathcal{X}_K$ est un K-schéma en groupes pour la loi m_K.*

Alors il existe simultanément
- *un S-schéma en groupes, on le note $\widetilde{\mathcal{X}}$ et $\widetilde{m}$ sa loi de groupe, qui est séparé, lisse, de type fini,*
- *une immersion ouverte S-dense $\mathcal{X} \to \widetilde{\mathcal{X}}$ telle que la loi de groupe $\widetilde{m}$ se restreint à m sur $\mathcal{X}$.*

De plus, $\widetilde{\mathcal{X}}$ est unique à isomorphisme canonique près.

1.2 Définition des modèles entiers du groupe

1.2.1 Proposition-définition ([Lan96, 5.17])**.** À unique isomorphisme près, il existe un unique $\mathcal{O}_K$-schéma en groupes séparé, lisse, de type fini, noté $\mathfrak{G}_\Omega$ et une unique immersion ouverte $\mathfrak{X}_\Omega \to \mathfrak{G}_\Omega$ telle que la restriction de la loi de groupe de $\mathfrak{G}_\Omega$ à $\mathfrak{X}_\Omega$ est la loi de groupe birationnelle sur $\mathfrak{X}_\Omega$.

Démonstration. Notons $\mathfrak{X}'$ le $\mathcal{O}_K$-schéma obtenu en recollant G et $\mathfrak{X}_\Omega$ le long de la grosse cellule $(\mathfrak{X}_\Omega)_K = U^-TU^+$. C'est un $\mathcal{O}_K$-schéma séparé [?, 5.5.6], lisse, de type fini et de fibre générique $\mathfrak{X}'_K = G$. La loi de groupe birationnelle m sur $\mathfrak{X}_\Omega$ s'étend naturellement en une loi de groupe birationnelle sur $\mathfrak{X}'$. Il en est de même pour l'inverse. On peut appliquer le théorème 1.1.2 à $\mathfrak{X}'$ et $R = \mathcal{O}_K$, ce qui conclut. □

1.3 Propriétés des formes entières du groupe

1.3.1 Proposition. *(i) $\mathfrak{G}_\Omega$ est un $\mathcal{O}_K$-schéma en groupes affine, lisse, connexe, de type fini et de fibre générique G.*

1.3.2 Proposition. *(ii) Les inclusions $T \subset G$ et $U_a \subset G$ s'étendent en des isomorphismes de $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{U}_{a,\Omega}$ respectivement sur des sous-$\mathcal{O}_K$-schémas fermés de $\mathfrak{G}_\Omega$.*

(iii) Soit Ψ une partie close de Φ^+ (resp. Φ^-) et $\Psi_{nd} = \{a \in \Psi\,,\ \frac{a}{2} \notin \Psi\}$. Alors le morphisme produit $\prod_{a \in \Psi_{nd}} \mathfrak{U}_{a,\Omega} \to \mathfrak{G}_\Omega$ donne un isomorphisme de $\mathcal{O}_K$-schémas de $\prod_{a \in \Psi_{nd}} \mathfrak{U}_{a,\Omega}$ sur un sous-$\mathcal{O}_K$-schéma fermé de $\mathfrak{G}_\Omega$, que l'on note $\mathfrak{U}_{\Psi,\Omega}$, et qui ne dépend pas du choix de l'ordre choisi sur Ψ_{nd}. De plus, pour tout $a \in \Psi$, le $\mathcal{O}_K$-schéma $\mathfrak{U}_{\Psi,\Omega}$ contient l'image de $\mathfrak{U}_{a,\Omega}$. On note également $\mathfrak{U}^+_\Omega := \mathfrak{U}_{\Phi^+,\Omega}$ et $\mathfrak{U}^-_\Omega := \mathfrak{U}_{\Phi^-,\Omega}$.

1.3.3 Proposition. *(iv) Le morphisme produit induit un isomorphisme de $\mathcal{O}_K$-schéma en groupes de $\mathfrak{T}\mathfrak{U}_{\Psi,\Omega}$ sur un sous-$\mathcal{O}_K$-schéma en groupes de $\mathfrak{G}_\Omega$, que l'on note à nouveau $\mathfrak{T}\mathfrak{U}_{\Psi,\Omega}$.*

(v) Le morphisme produit induit un isomorphisme de $\mathcal{O}_K$-schéma de $\mathfrak{U}^-_\Omega \times \mathfrak{T} \times \mathfrak{U}^+_\Omega$ sur un sous-$\mathcal{O}_K$-schéma de $\mathfrak{G}_\Omega$, que l'on note $\mathfrak{X}_\Omega$.

1.4 Fonctorialité en Ω

Soit $\Omega \subset \Omega'$ deux parties bornées non vides de A incluses l'une dans l'autre.

1.4.1 Proposition. *L'identité $G \to G$ s'étend de manière unique en un morphisme de $\mathcal{O}_K$-groupes $\mathfrak{G}_{\Omega'} \to \mathfrak{G}_\Omega$*

Démonstration. Comme $\Omega \subset \Omega'$, on a pour tout $a \in \Phi$ l'inégalité

$$f_\Omega(a) = \sup\{-a(x)\,,\ x \in \Omega\} \leq \sup\{-a(x)\,,\ x \in \Omega'\} = f_{\Omega'}(a)$$

Comme la filtration des groupes radiciels est décroissante, on a donc $U_{a,f_{\Omega'}(a)} \subset U_{a,f_\Omega(a)}$. Ce qui se réinterprète en termes de points entiers des modèles des groupes radiciels en $\mathrm{id}_G(\mathfrak{U}_{a,\Omega'}(\mathcal{O}_K)) \subset \mathfrak{U}_{a,\Omega}(\mathcal{O}_K)$. En appliquant le principe d'extension, cette inclusion s'étend de manière unique en $\mathfrak{U}_{a,\Omega'} \to \mathfrak{U}_{a,\Omega}$ Par (iii), l'inclusion de la grosse cellule $U^-TU^+ \subset G$ s'étend de manière unique en $\mathfrak{X}_{\Omega'} \to \mathfrak{G}_\Omega$ et par (v), on a le résultat. □

2 Fibre spéciale

Conformément aux notations de Bruhat-Tits, pour tout $\mathcal{O}_K$-schéma $\mathfrak{X}$, on note $\overline{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X}_k$ la fibre spécial de ce schéma.

On cherche à décrire le k-groupe $\overline{\mathfrak{G}_\Omega}$.

2.1 Tores et normalisateurs de ces tores

2.1.1 Proposition. *(1) $\overline{\mathfrak{S}}$ est un tore k-déployé maximal de $\overline{\mathfrak{G}_\Omega}$.*

(2) $\mathfrak{T}$ est le centralisateur dans $\mathfrak{G}_\Omega$ de $\mathfrak{S}$.

(3) $\overline{\mathfrak{T}}$ est le centralisateur dans $\overline{\mathfrak{G}_\Omega}$ de $\overline{\mathfrak{S}}$.

Démonstration. (1) Supposons par l'absurde que $\overline{\mathfrak{S}}$ n'est pas un tore k-déployé maximal de $\overline{\mathfrak{G}_\Omega}$. Alors il existe un entier $n > \dim \overline{\mathfrak{S}}$ et une immersion fermée $\overline{u} : \mathbb{G}^n_{m,k} \to \overline{\mathfrak{G}_\Omega}$, que l'on peut étendre en un $\mathcal{O}_K$-morphisme de groupes $u : \mathbb{G}^n_{m,\mathcal{O}_K} \to \mathfrak{G}_\Omega$. Par [?, exp.IX 2.9], c'est une immersion fermée. Donc $u(\mathbb{G}^n_{m,\mathcal{O}_K})_K$ est un tore K-déployé maximal de G. Comme G est réductif sur K, ses tores K-déployé maximaux sont conjugués [Bor91, 20.9] donc de même dimension. Comme

$\mathfrak{S}$ a été construit pour être lisse, on a $\dim \mathfrak{S} = \dim S < n$ alors que $\dim u(\mathbb{G}^n_{m,\mathcal{O}_K})_K = n$. Contradiction.

(2) Par [?, exp.XI 5.3], le fonction $\mathfrak{X} \mapsto \mathcal{Z}_{(\mathfrak{G}_\Omega)_\mathfrak{X}}(\mathfrak{S}_\mathfrak{X})$ est représentable par un sous-$\mathcal{O}_K$-schéma en groupes lisse fermé de $\mathfrak{G}_\Omega$. On le note $\mathcal{Z}_{\mathfrak{G}_\Omega}(\mathfrak{S})$ et ses fibres sont connexes en tant que centralisateur de tore d'un groupe algébrique affine [Bor91, 11.12]

(3) est une conséquence immédiate de (2)

□

2.2 Radical unipotent

2.2.1 Proposition. *(1) Soit $a \in \Phi$, alors $\overline{\mathfrak{U}_{a,\Omega}}$ est un sous-k-groupe fermé de $\overline{\mathfrak{G}_\Omega}$ normalisé par $\overline{\mathfrak{S}}$ connexe, unipotent, sur lequel $\overline{\mathfrak{S}}$ agit par le caractère a sur son algèbre de Lie. De plus, $\overline{\mathfrak{U}_{a,\Omega}}$ est maximal pour ces propriétés.*

(2) Soit $\Psi \in \Phi^\pm$ une partie close. Alors $\overline{\mathfrak{U}_{\Psi,\Omega}}$ est un sous-k-groupe fermé de $\overline{\mathfrak{G}_\Omega}$ normalisé par $\overline{\mathfrak{S}}$ connexe, unipotent, sur lequel $\overline{\mathfrak{S}}$ agit par les caractères $a \in \Psi$ sur son algèbre de Lie. De plus, $\overline{\mathfrak{U}_{\Psi,\Omega}}$ est maximal pour ces propriétés.

(3) $R_u(\overline{\mathfrak{T}})$ est un sous-k-groupe fermé de $\overline{\mathfrak{G}_\Omega}$ normalisé par $\overline{\mathfrak{S}}$ connexe, unipotent, sur lequel $\overline{\mathfrak{S}}$ agit trivialement sur son algèbre de Lie. De plus, $R_u(\overline{\mathfrak{T}})$ est maximal pour ces propriétés.

Démonstration. Fermé, connexe, unipotent : ok. L'action de $\overline{\mathfrak{S}}$ se déduit de celle de $\mathfrak{S}$ sur l'algèbre de Lie des $\mathfrak{U}_{a,\Omega}$ et de $\mathfrak{T}$ respectivement. La maximalité se déduit par un argument de dimension. □

2.2.2 Lemme. *Soit $l, l' \in \mathbb{R}$ tels que $l + l' > 0$. Alors $\mathfrak{U}_{-a,l}(k)\mathfrak{T}(k)\mathfrak{U}_{a,l'}(k)$ est un groupe.*

Démonstration. Première étape : on montre que $U_{a,l'}U_{-a,l} \subset U_{-a,l}T(K)_bU_{a,l'}$. On utilise les calculs de l'exposé de Guy Rousseau.

Si $2a \notin \Phi$, alors on a les paramétrages $x_a : L_a \to U_a(K)$ et $x_{-a} : L_a \to U_{-a}(K)$.

D'une part, $\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-uu' & u \\ -u' & 1 \end{pmatrix}$

D'autre part, $\begin{pmatrix} 1 & u \\ -v' & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & tv \\ -tv' & t^{-1}-tvv' \end{pmatrix}$

On trouve donc que $x_a(u)x_{-a}(u') = x_{-a}(u't^{-1})\widetilde{a}(t)x_a(ut^{-1})$ avec $t = 1-uu' \in L_a^\times$ car $\omega(uu') \geq l + l' > 0$ donne $\omega(t) = 0$.

Si $2a \in \Phi$, alors on a les paramétrages $x_a : H_0(L_a, L_{2a}) \to U_a(K)$ et $x_{-a} : H_0(L_a, L_{2a}) \to U_{-a}(K)$.

Par un calcul de matrices 3×3 analogue au précédent, on trouve $x_a(u,v)x_{-a}(u',v') = x_{-a}(\frac{u'-uv'}{t}, \frac{v'}{t})\widetilde{a}(t)x_a(\frac{u-{}^\tau vu'}{t}, \frac{v}{t})$ avec $t = 1-{}^\tau uu'+vv' \in L_a^\times$ car $\omega(uu') \geq \frac{1}{2}(\omega(v)+\omega(v')) \geq l + l' > 0$ donne $\omega(t) = 0$.

Deuxième étape, on pose $M = U_{-a,l}T(K)U_{a,l'}$ et on montre que c'est un groupe. On sait que pour toute racine $a \in \Phi$ et tout réel l, on a $U_{a,l}T(K)U_{a,l} = U_{a,l}T(K) = T(K)U_{a,l}$. Donc $M\dot{M} = U_{-a,l}T(K)U_{a,l'}U_{-a,l}T(K)U_{a,l'} \subset M$. On en déduit que M est un groupe.

Troisième étape, on pose $\overline{M} = \mathfrak{U}_{-a,l}(k)\mathfrak{T}(k)\mathfrak{U}_{a,l'}(k)$ et on en relève les éléments dans M pour montrer que c'est un groupe. Comme les $\mathcal{O}_K$-schémas $\mathfrak{U}_{-a,l}$, $\mathfrak{U}_{a,l'}$ et $\mathfrak{T}$ sont lisses, les morphismes canoniques $\mathfrak{U}_{-a,l}(\mathcal{O}_K) \to \mathfrak{U}_{-a,l}(k)$

(resp. $\mathfrak{U}_{a,l'}(\mathcal{O}_K) \to \mathfrak{U}_{a,l'}(k)$ et $\mathfrak{T}(\mathcal{O}_K) \to \mathfrak{T}(k)$) sont surjectifs. On peut donc relever les éléments de $\overline{M}$ en des éléments de M. D'où le résultat. $\square$

2.2.3 Proposition. *Soit $a \in \Phi$ et $\Omega \subset A$ une partie bornée non vide. On pose $l = f_\Omega(a)$ et $l' = f_\Omega(-a)$. On note q le morphisme surjectif $\mathfrak{U}_{a,l}(\mathcal{O}_K) \to \mathfrak{U}_{a,l}(k)$. Si $l + l' = 0$ et $l \in \Gamma_a$, on pose $I_a = q(U_{a,l^+})$. Sinon,$l + l' > 0$ ou $l \notin \Gamma_a$ et on pose $I_a = q(U_{a,l})$. On a alors $I_a = R_u(\overline{\mathfrak{G}_\Omega})(k) \cap \mathfrak{U}_{a,\Omega}(k)$*

2.2.4 Remarque. Le groupe I_a calcule la contribution du groupe radiciel $\mathfrak{U}_{a,\Omega}$ au radical unipotent du groupe $\overline{\mathfrak{G}_\Omega}$. Le cas $l + l' = 0$ et $l \in \Gamma_a$ traduit le fait que Ω est dans un mur dirigé par la racine a. Dans ce cas, les groupes $\mathfrak{U}_{a,l}$ et $\mathfrak{U}_{-a,l'}$ vont donner des contributions de groupes radiciels opposés dans $\overline{\mathfrak{G}_\Omega}$.

Démonstration. On note $p : \overline{\mathfrak{G}_\Omega} \to \overline{\mathfrak{G}_\Omega}/R_u(\overline{\mathfrak{G}_\Omega})$ la projection. On sait que p est surjectif et que le groupe réductif $\overline{\mathfrak{G}_\Omega}/R_u(\overline{\mathfrak{G}_\Omega})$ est déployé car k est algébriquement clos par hypothèse. (Avec l'hypothèse k fini, on pourrait au moins dire que ce groupe est quasi-déployé par le théorème de Lang)

Comme $U_{a,l^+} \subset U_{a,l}$, on a $I_a \subset q(U_{a,l}) = \mathfrak{U}_{a,\Omega}(k)$.

Montrons que $I_a \subset R_u(\overline{\mathfrak{G}_\Omega})$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $\xi \in I_a$ tel que $p(\xi) \neq 1$. Notons $u = p(\xi)$ l'élément du groupe radiciel $p(\mathfrak{U}_{a,\Omega}(k))$ de $\overline{\mathfrak{G}_\Omega}/R_u(\overline{\mathfrak{G}_\Omega})$. Par les axiomes de donnée de groupes radicielle, on sait qu'il existe des éléments $u', u'' \in p(\mathfrak{U}_{-a,\Omega}(k))$ qui sont uniquement déterminés par u et le fait que $m_a(u) = u'uu'' \in \mathcal{N}_{p(\overline{\mathfrak{G}_\Omega})}(p(\mathfrak{S}))$ relève la réflexion r_a du groupe de Weyl. On relève u' et u'' en des éléments ξ' et ξ'' de $\mathfrak{U}_{-a,\Omega}(k)$ Si $l \notin \Gamma_a$, alors on a $\mathfrak{U}_{a,l} = \mathfrak{U}_{a,l^+}$. Si $l \in \Gamma_a$ et $l' + l = 0$, alors $u \neq 1$ impose qu'en fait $u \in \mathfrak{U}_{a,l^+}$. Sinon, on a alors $l + l' > 0$. De sorte que le lemme précédent s'applique et donc $m_a(u) \in p(M)$ centralise $p(\mathfrak{S})$. Ceci contredit l'action de $m_a(u)$ par la reflexion r_a. Donc pour tout $\xi \in I_a$, on a $p(\xi) = 1$ c'est-à-dire $\xi \in R_u(\overline{\mathfrak{G}_\Omega})(k)$.

Réciproquement, on montre que pour $\xi \in \mathfrak{U}_{a,\Omega}(k)$, on a $\xi \in R_u(\overline{\mathfrak{G}_\Omega})(k) \Rightarrow \xi \in I_a$. On montre la contraposée. Soit $\xi \notin I_a$, alors nécessairement on est dans le cas $l + l' = 0$ et $l \in \Gamma_a$. On utilise la surjectivité de q pour choisir un élément $x \in U_{a,l}$ tel que $q(x) = \xi$. Si $x \in U_{a,l^+}$, alors $\xi = q(x) \in I_a$, ce qui est exclus. On conclut en utilisant le lemme suivant

2.2.5 Lemme. *L'élément $p \circ q(m_a(x))$ normalise $\overline{\mathfrak{S}}$ et induit la réflexion r_a du groupe de Weyl.*

La démonstration du lemme **??** donne l'existence d'éléments $x', x'' \in \mathfrak{U}_{-a,\Omega}(\mathcal{O}_K)$. On pose $\xi' = q(x')$ et $\xi'' = q(x'')$ Si par l'absurde $p(\xi) = 1$, alors $p \circ q(m_a(x)) = p(\xi'\xi\xi'') = p(\xi')p(\xi'')$ est un élément de $p(\mathfrak{U}_{-a,\Omega}(k) \cap \mathcal{N}_{p(\overline{\mathfrak{G}_\Omega})}(\overline{\mathfrak{S}})$. Cette intersection est triviale, ce qui contredit le fait que cet élément induit la réflexion r_a. Donc $p(\xi) \neq 1$ et on a le résultat. $\square$

Démonstration du lemme 2.2.5.

1er cas : $2a \notin \Phi$

On écrit $x = x_a(u)$ avec $u \in L_a$ et $m_a(x) = x'xx'' \in \mathcal{N}_G(S)(K)$ avec $x' = x'' = x_{-a}(u^{-1})$. Comme $x \in U_{a,l} \setminus U_{a,l^+}$, on a $\omega(u) = l = -\omega(u^{-1})$. Donc $m_a(x) \in \mathfrak{G}_\Omega(\mathcal{O}_K) \cap \mathcal{N}_G(S)(K)$. Donc $m_a(x)$ normalise $\mathfrak{S}$ et induit la réflexion r_a du groupe de Weyl, $q(m_a(x))$ normalise $\overline{\mathfrak{S}}$ et $p \circ q(m_a(x))$ normalise $p(\overline{\mathfrak{S}})$.

2ème cas : $2a \in \Phi$

1er sous-cas : $\forall \varepsilon > 0 \ x \notin U_{a,l+\varepsilon} U_{2a,2l}$

On écrit $x = x_a(u,v)$ avec $(u,v) \in H_0(L_a, L_{2a})$ et $\omega(v) = 2l$. On sait que $\omega(u) \geq \omega(v)$. On pose $\gamma = \omega(u) - \omega(v) \in \mathbb{R}_+$ On sait par des calculs explicites que dans l'écriture $m_a(x) = x'xx''$, on a $x' = x_{-a}(uv^{-1}, {}^\tau v^{-1})$ et $x'' = x_{-a}(u^\tau v^{-1}, {}^\tau v^{-1})$. Donc on a $x', x'' \in \mathfrak{U}_{-a,-l}(\mathcal{O}_K) = \mathfrak{U}_{-a,\Omega}(\mathcal{O}_K)$. Donc $m_a(x)$ normalise $\mathfrak{S}$ et induit la réflexion r_a du groupe de Weyl, $q(m_a(x))$ normalise $\overline{\mathfrak{S}}$ et $p \circ q(m_a(x))$ normalise $p(\overline{\mathfrak{S}})$.

2ème sous-cas : $\exists \varepsilon > 0 \ x \in U_{a,l+\varepsilon} U_{2a,2l}$

On écrit $x = x_0 x_1$ avec $x_0 \in U_{a,l+\varepsilon}$ et $x_1 \in U_{2a,2l}$. Comme $q(x_0) = 1$, on peut supposer $x = x_1$ et on est ramené au 1er cas car $4a \notin \Phi$.

□

2.2.6 Corollaire. *Le radical unipotent de $\overline{\mathfrak{G}_\Omega}$ est engendré par $R_u(\overline{\mathfrak{T}})$ et les I_a pour $a \in \Phi$.*

Démonstration. Le groupe engendré par $R_u(\overline{\mathfrak{T}})$ et les I_a pour $a \in \Phi$ est un sous-groupe fermé connexe de $R_u(\overline{\mathfrak{G}_\Omega})$ [Hum98, 7.5]. Pour des raisons de dimension, on a égalité. □

2.3 Système de racines du groupe réductif

On dispose d'un groupe réductif déployé $\overline{\mathfrak{G}_\Omega}/R_u(\overline{\mathfrak{G}_\Omega})$ dont on cherche à déterminer le système de racines Φ_Ω par rapport au tore k-déployé maximal déduit de $\overline{\mathfrak{S}}$.

2.3.1 Proposition. *On pose $\Phi_\Omega = \{a \in \Phi\,,\ f_\Omega(a) + f_\Omega(-a) = 0$ et $f_\Omega(a) \in \Gamma'_a\}$. C'est le système de racines de $\overline{\mathfrak{G}_\Omega}/R_u(\overline{\mathfrak{G}_\Omega})$ par rapport au tore k-déployé maximal $p(\overline{\mathfrak{S}})$.*

Démonstration. On note comme précédemment $l = f_\Omega(a)$ et $l' = f_\Omega(-a)$. On a montré précédemment que des groupes radiciels opposés apparaissent uniquement dans le cas où $l + l' = 0$ et $l \in \Gamma_a$.

Si $l \notin \Gamma'_a$, on est alors nécessairement dans le cas où $2a \in \Phi$. On a l'isomorphisme $\mathfrak{U}_{a,l}/I_a = \mathfrak{U}_{2a,2l}/\mathfrak{U}_{2a,2l^+}$, donc le tore k-déployé agit uniquement par le caractère $2a$.

Sinon, le tore k-déployé agit par le caractère a. □

2.3.2 Remarque. En particulier, on retrouve bien que sous l'hypothèse k algébriquement clos, le système de racines est réduit.

Table des matières

Références

[Bor91] Armand Borel. *Linear algebraic groups.* Graduate texts in mathematics 126. Springer, 2nd edition, 1991.

[Hum98] James E. Humphreys. *Linear algebraic groups.* Graduate texts in mathematics 21. Springer, 4th edition, 1998.

[Lan96] Erasmus Landvogt. *A compactification of the Bruhat-Tits building.* Lecture notes in mathematics 1619. Springer, 1 edition, 1996.