Construction d'immeubles par recollement et exemple

Benoit Loisel

20 mars 2015

Résumé

On se donne un groupe réductif définit sur un corps local. Il existe une première extension finie non ramifiée sur lequel le groupe est alors quasi-déployé. Si l'on peut construire, sur cette extension, un immeuble de Bruhat-Tits sur lequel le groupe agit avec de bonnes propriétés (action fidèle, fortement transitive), on saura construire un immeuble sur le corps de départ avec une action du groupe convenable, en prenant les points fixes sous l'action du groupe de Galois de l'extension.

Pour construire l'immeuble d'un groupe quasi-déployé, on dispose de deux stratégies : on peut soit déployé le groupe sur une extension finie galoisienne dont on ne maîtrise pas si elle est ramifiée ou non, puis travailler davantage pour obtenir l'immeuble du groupe quasi-déployé par descente. On peut aussi construire directement l'immeuble du groupe quasi-déployé, dont tous les ingrédients nécessaires sont encodés dans une donnée que l'on appelle une donnée de groupes radicielle valuée (DGRV). Il suffit alors d'établir l'existence d'une DRGV pour tout groupe réductif quasi-déployé.

Pour construire l'immeuble par recollement, on a besoin d'un modèle d'appartement muni de murs, et donc de facettes, alcôves, sommets,... que l'on précisera. Ensuite on prescrira, en utilisant des filtrations des groupes radiciels, les stabilisateurs de points et de parties point par point dans l'immeuble. Enfin, on proposera un ensemble pour l'immeuble recollant des copies du modèle d'appartement de telle sorte qu'il s'agisse d'un immeuble et que le groupe agisse fortement transitivement sur l'immeuble.

1 Rappels des notations

On fixe une fois pour toutes un corps local noté K, un groupe réductif, noté G, qui est défini et quasi-déployé sur K. On choisit une extension de corps locaux L/K galoisienne telle que G est déployé sur L.

1.1 Notations des corps locaux utilisés

On note $\omega = \omega_K$ la valuation discrète (non archimédienne et non triviale) du corps local K, et $|\cdot|_\omega$ une norme associée à cette valuation pour laquelle K est complet. On note $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K, à savoir $\{x \in K, \omega(x) \geq 0\}$ et π_0 une uniformisante de K. On note $\kappa_K = \mathcal{O}_K/\pi_0\mathcal{O}_K$ le corps résiduel (fini) de K. Notons également $\Gamma_K = \omega(K^\times) \subset \mathbb{R}$ les valeurs finies prises par la valuation de K.

On note $n = [L : K]$ le degré de l'extension. On rappelle qu'il existe une unique norme sur L prolongeant $|\cdot|_\omega$, faisant de L un corps local. On note la valuation discrète associée $\omega_L = \frac{1}{n}\omega_K \circ N_{L/K}$ où $N_{L/K}$ est la norme de l'extension. Dans toute la suite, on notera par abus ω la valuation d'un scalaire du fait de l'unicité. Remarquons que cette valuation est invariante sous l'action naturelle du groupe de Galois de l'extension L/K. On note alors $\mathcal{O}_L$ l'anneau des entiers de L et π_1 une uniformisante de L. On note κ_L le corps résiduel de L. Notons également $\Gamma_L = \omega(L^\times) \subset \mathbb{R}$ les valeurs finies prises par la valuation de K..

Remarquons que l'on a les inclusions de sous-groupes discrets de $\mathbb{R}$ suivante $\Gamma_K \leq \Gamma_L \leq \frac{1}{n}\Gamma_K$. On note e l'indice de Γ_K dans Γ_L,on a $e|n$. On note f le degré de l'extension (à isomorphisme canonique près) κ_L/κ_K. On rappelle que $n = e \cdot f$.

On dit que L/K est ramifiée sur $f \neq n$, totalement ramifiée si $e = n$ et $f = 1$, et non ramifiée si $e = 1$ et $f = n$.

1.2 Notations des sous-groupes du groupe réductif considéré, rappels des exposés précédents

On choisit un tore K-déployé maximal de G et on le note S. On pose $T = \mathcal{Z}_G(S)$. C'est un tore maximal définit sur K de G, que l'on peut supposé déployé sur L. On note $T(K)_b$ le sous-tore compact maximal de $T(K)$.

On note $\Phi = \Phi(G, S) \leq X^*(S)$ le système de racines de G sur S qui sont exactement les restrictions à S des racines de G_L sur T_L, et l'on note $\widetilde{\Phi} = \Phi(G_L, T_L)$ le système de racines réduit de G_L sur T_L.

On pose $N = \mathcal{N}_G(S)$.

On pose $V_1 = X_*(T)_K \otimes \mathbb{R}$. À l'aide des appariements entre caractères et cocaractères de T définis sur K, on a pu définir une dualité sur V_1 et identifier $X^*(T)_K$ et $X^*(S)$ à des parties de V_1^*. La partie « inutile » de V_1 est $V_0 = \bigcap_{a \in \Phi} \ker a$, c'est celle sur laquelle les racines opèrent toutes trivialement. V_0 est en particulier non vide dès qu'une partie du tore S est centrale dans G. On note $V = V_1/V_0$ et par dualité, on a pu identifier les éléments de $T(K)$ à des éléments de V via un morphisme de groupes abéliens $\nu : T(K) \to V$.

1.2.1 Proposition. *À isomorphisme affine près, il existe un unique espace affine noté $A = A(G, S, K)$ au-dessus de V accompagné d'un morphisme $N(K) \to \mathrm{Aff}(A)$ prolongeant ν. On le note à nouveau ν.*

2 Construction de l'immeuble de Bruhat-Tits par recollement dans le cas déployé

2.1 Valuation réelle de donnée de groupes radicielle

On a défini une donnée de groupes radicielle $(G(K), (U_a(K))_{a\in\Phi}, T(K))$.

En particulier, l'un des axiomes demande que pour toute racine $a \in \Phi$ et tout élément du groupe radiciel correspondant, notons le $\mathbf{u} \in U_a(K)$, l'ensemble $U_{-a}(K)\mathbf{u}U_{-a}(K) \cap N(K)$ est un singleton et on note $m(\mathbf{u}) = \mathbf{u}'\mathbf{u}\mathbf{u}''$ cet élément avec $\mathbf{u}', \mathbf{u}'' \in U_{-a}(K)$.

Pour $a \in \Phi$, on note $\Sigma_a = \mathrm{Stab}_\Sigma(a)$ le stabilisateur de l'action de $\Sigma = \mathrm{Gal}(L/K)$ sur les racines simples, et qui en induit donc aussi une sur les racines. On note $L_a = L^{\Sigma_a}$.

Pour $a \in \Phi_{nd}$ on a explicité des paramétrages :

- Si $2a \notin \Phi$, on a $x_a : L_a \to U_a(K)$. Pour $v \in L_a$, on peut expliciter $m(x_a(v))$. Par le calcul, on obtient $\mathbf{u}' = \mathbf{u}'' = x_{-a}(-v^{-1})$ et on note $m_a = m(x_a(1))$.
- Si $2a \in \Phi$, on note τ_a l'élément non trivial du groupe d'ordre deux $\Sigma_{2a}/\Sigma_a = \mathrm{Gal}(L_a/L_{2a})$. On pose $H_0(L_a, L_{2a}) = \{(u,v) \in L_a \times L_a, u^{\tau_a}u = v + {}^{\tau_a}v\}$ et $L_a^0 = \{v \in L_a, (0,v) \in H_0(L_a, L_{2a})\}$, isomorphe à L_{2a} (en tant que groupe car c'en est un espace vectoriel de dimension un). Les paramétrages sont alors $x_a : H_0(L_a, L_{2a}) \to U_a(K)$ et $x_{2a} : L_a^0 \to U_{2a}(K)$ avec $x_{2a}(v) = x_a(0,v)$. On peut expliciter $m(x_a(u,v))$. Par le calcul, on obtient $\mathbf{u}' = x_{-a}(uv^{-1}, {}^{\tau}v^{-1})$ et $\mathbf{u}'' = x_{-a}(u^{\tau}v^{-1}, {}^{\tau}v^{-1})$ et on note m_a l'élément de $N(K)$ qui correspondrait à $m(x_a(0,1))$ si on avait $(0,1) \in H_0(L_a, L_{2a})$.

De ces paramétrages, on définit une valuation réelle de la donnée de groupes radicielle par les formules :

- Si $2a \notin \Phi$, pour $v \in L_a$, on pose $\varphi_a(x_a(v)) = -\omega(v)$
- Si $2a \in \Phi$, pour $(u,v) \in H_0(L_a, L_{2a})$, on pose $\varphi_a(x_a(u,v)) = -\frac{1}{2}\omega(v)$ et pour $v \in L_a^0$, on pose $\varphi_{2a}(x_{2a}(v)) = -\omega(v)$

2.1.1 Proposition. *$(\varphi_a)_{a\in\Phi}$ est une valuation réelle de la donnée de groupes radicielle $(G(K), (U_a(K))_{a\in\Phi}, T(K))$, c'est-à-dire qu'elle vérifie les axiomes suivants :*

(V0) Pour toute racine $a \in \Phi$, on a une application $\varphi_a : U_a(K) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ qui prend au moins trois valeurs distinctes.

(V1) Pour toute racine $a \in \Phi$ et tout élément $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, l'ensemble $U_{a,l} = \varphi_a^{-1}([l, +\infty])$ est un sous-groupe de $U_a(K)$ et en particulier, $U_{a,+\infty} = \{1\}$ est un groupe trivial.

(V2) (a) Pour toute racine $a \in \Phi$ et tout élément $\mathbf{u} \in U_a(K) \setminus \{1\}$, l'application $\begin{array}{ccc} U_{-a}(K) \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ \mathbf{u}' & \mapsto & \varphi_{-a}(\mathbf{u}') - \varphi_a(m(\mathbf{u})\mathbf{u}'m(\mathbf{u})^{-1}) \end{array}$ est constante.

(b) Pour toute racine $a \in \Phi$ et tout élément $t \in T(K)$, l'application $\begin{array}{ccc} U_a(K) \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ \mathbf{u} & \mapsto & \varphi_a(\mathbf{u}) - \varphi_a(t\mathbf{u}t^{-1}) \end{array}$ est constante.

(V3) Pour tout couple de racines (a, a') telles que $-a' \notin \mathbb{R}_+ a$ et tout couple de paramètres (l, l'), le groupe $[U_{a,l}, U_{a',l'}]$ est un sous-groupe du sous-groupe de $G(K)$ engendré par les $U_{pa+p'a', pl+p'l'}$ avec $p, p' \in \mathbb{N}^*$ et $pa + p'a' \in \Phi$.

(V4) Si $a \in \Phi$ et $2a \in \Phi$, alors $\varphi_{2a} = (2\varphi_a)|_{U_{2a}(K)}$.

(V5) Pour toute racine $a \in \Phi$, tout élément $\mathbf{u} \in U_a(K)$ et $\mathbf{u}', \mathbf{u}'' \in U_{-a}(K)$ tels que $m(\mathbf{u}) = \mathbf{u}'\mathbf{u}\mathbf{u}''$, on a $\varphi_{-a}(\mathbf{u}') = \varphi_{-a}(\mathbf{u}'') = -\varphi_a(\mathbf{u})$

Ces axiomes assurent que les filtrations des groupes radiciels sont choisies de façon cohérente, correctement proportionnées les unes par rapport aux autres.

2.2 Racines affines

On veut prescrire pour collection de murs de l'appartement A les lieux de points fixes des images par ν de certains $m(\mathbf{u})$, pour $\mathbf{u} \in U_a(K)$ et $a \in \Phi$.

Pour $a \in \Phi$, on définit les ensembles

$$\Gamma_a = \varphi_a(U_a(K) \setminus \{1\})$$

$$\Gamma'_a = \{\varphi_a(\mathbf{u})\,,\, \mathbf{u} \in U_a(K) \text{ et } \varphi_a(\mathbf{u}) = \sup \varphi_a(\mathbf{u}U_{2a}(K))\}$$

où bien sûr $U_{2a}(K) = \{1\}$ lorsque $2a \notin \Phi$.

Pour identifier A à V, on choisit une origine $\mathcal{O}$ de A telle que pour toute racine $a \in \Phi$, on ait $\nu(m_a)(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$. Nota bene : $\mathcal{O}$ n'est pas nécessairement un sommet spécial car cela dépend de l'appartenance ou non des m_a à $m(U_a(K) \setminus \{1\})$ pour $2a \in \Phi$.

Fixons $a \in \Phi$ et $\mathbf{u} \in U_a(K)$. a est une forme linéaire sur V, donc on peut définir la réflexion de V d'hyperplan $\ker a$ et on la note r_a.

2.2.1 Proposition. *Pour $a \in \Phi$ et $\mathbf{u} \in U_a(K)$, on a $\nu(m(\mathbf{u}))(x) = \mathcal{O} + r_a(\vec{\mathcal{O}x}) + \varphi_a(\mathbf{u})a^\vee$.*

On note alors $H_\mathbf{u} = \{x \in A, \nu(m(\mathbf{u}))(x) = x\}$. On retrouve par le calcul que $H_\mathbf{u} = \{x \in A, a(\vec{\mathcal{O}x}) - \varphi_a(\mathbf{u}) = 0\}$.

2.2.2 Définition. Pour $a \in \Phi$ et $\mathbf{u} \in U_a(K)$ tel que $\varphi_a(\mathbf{u}) \in \Gamma'_a$, on appelle racine affine l'application affine $\begin{array}{rccc} \theta_\mathbf{u} : & A & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & a(\vec{\mathcal{O}x}) - \varphi_a(\mathbf{u}) \end{array}$

On note Φ_{aff} l'ensemble des racines affines.

Cette définition est motivée par la proposition suivante :

2.2.3 Proposition. *Les racines affines forment un système de racines affines.*

Le groupe de Coxeter associé à Φ_{aff} est le sous-groupe de $W = \nu(N(K))$ engendré par les $\nu(m(\mathbf{u}))$ où $\theta_\mathbf{u}$ est une racine affine.

Les murs sont exactement les lieux d'annulation des racines affines. Avec le point de vue des racines affines, il est alors facile de définir des demi-appartements associés aux éléments des groupes radiciels par la formule

$$D(\mathbf{u}) = \{x \in A, \theta_\mathbf{u}(x) \geq 0\}$$

dont le bord est le mur $H_\mathbf{u}$.

Les intersections bien choisies de demi-appartements ouverts et murs permettent de définir une partition de A en alcôves, facettes et sommets.

2.3 Prescription de stabilisateurs point par point de parties

Pour toute partie $\Omega \subset V$ non vide, on définit une application

$$\begin{array}{rccc} f_\Omega : & \Phi & \to & \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ & a & \mapsto & -\sup\limits_{x \in \Omega} a(x) \end{array}$$

Remarque : étant fait le choix d'une origine dans A, on peut aussi considérer Ω comme une partie de A.

La définition de ces applications est motivée par le fait que ce nombre réel (ou $-\infty$) est aussi petit que possible mais assez grand de sorte que pour tout $\mathbf{u} \in U_{a,f_\Omega(a)}$, on ait $\Omega \subset D(\mathbf{u})$.

On définit l'enclos de Ω comme étant l'intersection des demi-appartements $D(\mathbf{u})$ contenant Ω. On dit que Ω est une partie close si elle est égale à son enclos.

Pour toute partie $\Omega \subset V$ non vide, on définit les sous-groupes de $G(K)$ suivants (Notations de Bruhat-Tits)

1. $U_{a,\Omega} = U_{a,f_\Omega(a)}$ pour tout $a \in \Phi$ et $U_\Omega = \langle U_{a,\Omega}\, ,\, a \in \Phi \rangle$
2. $N_\Omega = N(K) \cap U_\Omega$ et $\widehat{N_\Omega} = \{n \in N(K), \forall x \in \Omega\, \nu(n)(v) = x\}$
3. $P_\Omega = T(K)_b \cdot U_\Omega$ et $\widehat{P_\Omega} = \langle \widehat{N_\Omega} U_\Omega \rangle$

Lorsque G est simplement connexe on trouve que $\widehat{N_\Omega} = N_\Omega$ et $\widehat{P_\Omega} = P_\Omega$.

2.3.1 Proposition. *On a* $\widehat{P_\Omega} = \bigcap_{x \in \Omega} \widehat{P_{\{x\}}}$

Ceci conforte l'idée que $\widehat{P_\Omega}$ est le bon candidat à être le stabilisateur point par point de la partie Ω une fois qu'elle sera vue dans l'immeuble.

2.3.2 Proposition. *On a* $\widehat{N_\Omega} = N(K) \cap \widehat{P_\Omega}$

2.4 Recollement d'appartements

On définit sur l'ensemble $G(K) \times A$ une relation par

$$(g,x) \sim (h,y) \Leftrightarrow \exists n \in N(K) \left\{ \begin{array}{l} y = \nu(n)(x) \\ g^{-1}hn \in U_{\{x\}} \end{array} \right.$$

C'est une relation d'équivalence. Notons $[g,x]$ la classe du couple (g,x).

2.4.1 Définition. On appelle immeuble de Bruhat-Tits de G sur K associé au tore K-déployé S, l'ensemble quotient

$$X(G) = \frac{G(K) \times A}{\sim}$$

Il faut vérifier qu'il s'agit bien d'un immeuble et que l'on a une action de $G(K)$ sur $X(G)$ par automorphismes de l'immeuble qui est fortement transitive.

Le premier lemme est l'existence d'un appartement dans l'immeuble ayant le type affine choisi.

2.4.2 Lemme. *L'application* $\begin{array}{rccc} \iota : & A & \to & X(G) \\ & x & \mapsto & [1,x] \end{array}$ *est injective.*

Autrement dit, il existe une partie de l'immeuble qui sera appelée appartement standard. On la note $\mathbb{A} = \iota(A)$. On identifie via ι les parties de $\mathbb{A}$ à celles de A.

On peut définir une action naturelle de $G(K)$ sur $X(G)$, qui coïncide avec celle de $N(K)$ sur $\mathbb{A}$, par la formule

$$\forall g,h \in G(K)\, \forall x \in A \quad h \cdot [g,x] = [hg,x]$$

2.4.3 Définition. On définit alors les appartements (resp. sommets, facettes, alcôves, murs) de l'immeuble $X(G)$ comme étant les parties $F \subset X(G)$ telles qu'il existe un élément $g \in G(K)$ vérifiant $\mathbb{A} = g \cdot F$ (resp. $g \cdot F$ est un(e) sommet, facette, alcôve, mur de A).

Décrivons les stabilisateurs point par point.

2.4.4 Proposition. *Soit $\Omega \subset A$ une partie non vide.*

1. *On a* $\widehat{P_\Omega} = \{g \in G(K)\,,\, gx = x \forall x \in \Omega\}$.
2. *Réciproquement,* $\mathrm{cl}(\Omega) = \{x \in A\,,\, gx = x \forall g \in \widehat{P_\Omega}\}$

2.4.5 Lemme. *Si F est une facette de $X(G)$ telle que $F \cap g\mathbb{A} \neq \emptyset$ pour un certain $g \in G(K)$, alors il existe une facette F' de $\mathbb{A}$ telle que $F = gF'$. En particulier, $F \subset g\mathbb{A}$.*

Si F et F' sont deux facettes de $\mathbb{A}$ telles que $F \subset \overline{F'}$, alors tout appartement contenant F' contient F. En particulier, l'action de $G(K)$ préserve l'inclusion des (adhérences de) facettes.

2.4.6 Proposition (Premier axiome des immeubles définis par un système d'appartements)**.** *Deux alcôves sont toujours contenues dans un appartement commun.*

2.4.7 Lemme (Action sur les intersection d'appartement)**.** *Soit $g \in G(K)$. La partie $\Omega = \mathbb{A} \cap g^{-1}\mathbb{A}$ est close.*

L'action de g sur Ω correspond à celle d'un élément $n \in N(K)$. Autrement dit, $\forall x \in \mathbb{A} \cap g^{-1}\mathbb{A}\; gx = nx$.

En particulier, l'élément $g^{-1}n$ fixe point par point l'intersection des deux appartements.

On en déduit immédiatement la

2.4.8 Proposition (Second axiome des immeubles définis par un système d'appartement)**.** *Pour tout couple d'appartements, il existe un élément de $G(K)$ dont l'action sur l'immeuble fixe point par point l'intersection des deux appartements.*

On sait désormais que $X(G)$ vérifie les axiomes qui en font un immeuble pour l'action de $G(K)$ par automorphisme du complexe simplicial défini sur $X(G)$. Il reste à énoncer le

2.4.9 Théorème. *L'action de $G(K)$ sur $X(G)$ est fortement transitive, c'est-à-dire qu'elle agit transitivement sur l'ensemble des couples $(F, \mathbb{A}')$ pour lesquels $\mathbb{A}'$ est un appartement et F est une alcôve de $\mathbb{A}'$.*

3 Exemple de construction dans un cas quasi-déployé de rang un

Supposons désormais que l'extension galoisienne L/K est quadratique, elle est donc soit non ramifiée, soit totalement ramifiée. On note τ l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(L/K)$.

On dispose sur L^3 de la forme hermitienne notée h définie par $h((X_{-1}, X_0, X_1), (Y_{-1}, Y_0, Y_1)) = X_{-1}{}^\tau Y_1 + X_0{}^\tau Y_0 + X_1{}^\tau Y_{-1}$. On choisit $G = SU(h)$. C'est un K-groupe réductif et une K-forme de $SL_{3,L}$. On identifie G au sous-groupes des matrices de $SL_{3,L}$ qui sont stables pour l'action de $\mathrm{Gal}(L/K)$.

Sur L, le groupe $\widetilde{G} = G_L \simeq SL_{3,L}$ est déployé et

$$\widetilde{S} = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & t_1^{-1} \cdot t_2 & \\ & & t_2^{-1} \end{pmatrix} ; t_1, t_2 \in L^\times \right\}$$

en est un tore maximal L-déployé. $\widetilde{\Phi}$ est un système de racines de rang 2, de racines simples $\{\alpha, \beta\}$ échangées par l'action de τ sur les types des groupes paraboliques.

Explicitement, $\alpha \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & t_1^{-1} \cdot t_2 & \\ & & t_2^{-1} \end{pmatrix} = t_1^2 t_2^{-1}$ et $\beta \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & t_1^{-1} \cdot t_2 & \\ & & t_2^{-1} \end{pmatrix} = t_1^{-1} t_2^2$

3.1 Description matricielle d'un tore maximal et des groupes radiciels associés

Il existe un tore maximal de G que l'on note T pour lequel on dispose d'un isomorphisme $\widetilde{a} : L^\times \to T(K)$ défini par

$$\widetilde{a}(t) = \begin{pmatrix} t & & \\ & t^{-1} \cdot {}^\tau t & \\ & & {}^\tau t^{-1} \end{pmatrix}$$

Ceci est un isomorphisme entre $R_{L/K}(\mathbb{G}_{m,L})$ et T.

On choisit pour tore K-déployé maximal de G, de dimension 1, le sous-tore $S = \{\widetilde{a}(t); t \in K^\times\}$ de T. Il existe un unique choix de racines simples pour $\Phi = \Phi(G, S)$ cohérent avec celui choisi précédemment et l'unique racine simple de Φ est donnée par $a = \alpha|_S = \beta|_S$. On a $a(\widetilde{a}(t)) = t$, de sorte que $a^\vee = 2\widetilde{a}|_{K^\times}$.

On a $\Phi = \{-2a, -a, a, 2a\}$. Notons $H_0(L, K) = \{(u, v) \in L \times L, u^\tau u = v + {}^\tau v\}$, c'est un K-groupe isomorphe à $U_a(K)$ et $U_{-a}(K)$ respectivement via les isomorphismes

$$x_a(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & -{}^\tau u & -v \\ & 1 & u \\ & & 1 \end{pmatrix} \text{ et } x_{-a}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ u & 1 & \\ -v & -{}^\tau u & 1 \end{pmatrix}$$

Notons $L_0 = \{v \in L, 0 = v + {}^\tau v\}$, c'est un K-groupe isomorphe à $U_{2a}(K)$ et $U_{-2a}(K)$ respectivement via les isomorphismes $x_{2a}(v) = x_a(0, v)$ et $x_{-2a}(v) = x_{-a}(0, v)$.

Étant donné un élément $\mathbf{u} = x_a(u, v) \in U_a(K)$, il existe des éléments $\mathbf{u}', \mathbf{u}'' \in U_{-a}(K)$ tels que $m(\mathbf{u}) = \mathbf{u}'\mathbf{u}\mathbf{u}'' \in N(K)$. Explicitement, il s'agit de $\mathbf{u}' = x_{-a}(uv^{-1}, {}^\tau v^{-1})$ et $\mathbf{u}'' = x_{-a}(u^\tau v^{-1}, {}^\tau v^{-1})$. On vérifie ici aisément les axiomes de DGRV. On note alors $m(\mathbf{u}) = m_a(u,v)$ et m_a la matrice $\begin{pmatrix} & & -1 \\ & -1 & \\ -1 & & \end{pmatrix}$. On obtient par calcul direct $m_a x_a(u,v) m_a = x_{-a}(u,v)$ et $m_a(u,v) = \widetilde{a}(v) m_a = m_a \widetilde{a}({}^\tau v^{-1})$. Remarque : l'élément m_a du groupe $N(K)$ n'est pas nécessairement un élément de $U_{-a}(K)U_a(K)U_{-a}(K)$. Une condition nécessaire est que $v(2)$ soit un multiple entier de $2\omega(\pi_1)$ (Il faut qu'il existe $u \in L$ tel que $N_{L/K}(u) = 2$).

On note $Z = \mathcal{Z}_G(S)$ et $N = \mathcal{N}_G(S)$. On obtient $Z = T$ et $N(K) = T(K) \cdot \{1, m_a\}$.

3.2 L'appartement vide

On a $X_*(S) = \mathbb{Z}(\frac{1}{2}a^\vee)$ et $X^*(S) = \mathbb{Z}a$.

On a $X_*(Z)_K = \mathbb{Z}(\frac{1}{2}a^\vee)$ et $X^*(Z)_K = \mathbb{Z}(2a)$.

On pose $V_1 = X_*(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Notons $\vec{x} = \left(\frac{1}{2}a^\vee\right) \otimes x$ de sorte que l'application $x \mapsto \vec{x}$ identifie $\mathbb{R}$ à V, ce qui n'est pas canonique en soi. Constatons que $a(\vec{x}) = x$. Pour $z = \widetilde{a}(t) \in Z(K)$, on pose $e_z(2a \otimes x) = -x\omega(N_{L/K}(t)) = -2x\omega(t)$ de sorte que $\langle e_z, \chi \rangle = -\omega(\chi(z))$. On a $e_z = \left(\frac{1}{2}a^\vee\right) \otimes (-\omega(t)) \in (V_1^*)^* \sim V_1$ et on définit un morphisme $\nu_1 : Z(K) \to V_1$ par $\nu_1(z) = e_z$. On retrouve que le sous-groupe compact maximal de $T(K)$ est $T(K)_b = \widetilde{a}(\mathcal{O}_L^\times) = \ker \nu_1$.

Remarquons que $V_0 = \ker a = \{0\}$. On note $V = V_1/V_0$. À isomorphisme affine près, il existe un unique espace affine dirigé par V tel que le morphisme ν_1 sur $Z(K)$ s'étend en un morphisme de $N(K)$ sur les automorphismes affines de cet espace affine ; on le note $A = A(G,S,K)$. On identifie e_z à la translation de vecteur $-\vec{\omega}(t) \in V$ où l'on a posé $z = \widetilde{a}(t)$.

On pourrait choisir une origine, notée $\mathcal{O}$, de A qui sera un sommet spécial du futur modèle d'appartement. Nota Bene : En général, choisir $A = V$ et $\mathcal{O} = 0$ disconvient ! On peut néanmoins choisir, comme le fait E. Landvogt, $\mathcal{O} = 0$ et $A = V$ mais il faut garder à l'esprit que 0 n'a pas de raisons d'être un sommet spécial.

Explicitement, l'action de $N(K)$ sur A est alors donnée par

$$\nu(\widetilde{a}(t) m_a^\varepsilon) = \mathcal{O} + \vec{x} \mapsto \mathcal{O} + (-1)^\varepsilon \vec{x} - \vec{\omega(t)}$$

de sorte que $\nu(m_a)(0) = 0$.

3.3 L'appartement plein

Les racines affines sont les $a + l$ telles que $l \in \Gamma'_a$.

3.3.1 Lemme. *Pour tout $l \in \mathbb{R}$, les quotients $X_{a,l} = U_{a,l}/U_{a,l^+}$ et $X_{2a,l} = U_{2a,l}/U_{2a,l^+}$ sont des κ_K-espaces vectoriels et on a une inclusion naturelle de $X_{2a,2l}$ dans $X_{a,l}$.*

Soit $l \in \mathbb{R}$, on a équivalence entre

(i) $l \in \Gamma'_a$

(ii) $d(a + l) = \dim_{\kappa_K}(X_{a,l}/X_{2a,2l}) > 0$.

(iii) $U_{a,l} \not\subset U_{a,l^+}U_{2a}(K)$

Démonstration. On rappelle que pour $(u,v), (u',v') \in H_0(L,K)$ on a $x_a(u,v) \cdot x_a(u',v') = x_a(u+u', v+v'+u^\tau u')$ et $x_a(u,v)^{-1} = x_a(-u, u^\tau u - v)$.

U_{a,l^+} est un sous-groupe distingué de $U_{a,l}$. En effet, pour $(u,v),(u',v') \in H_0(L,K)$ avec $\frac{1}{2}\omega(v) \geq l$ et $\frac{1}{2}\omega(v) > l$, on a $x_a(u',v')x_a(u,v)x_a(u',v')^{-1} = x_a(u',v')x_a(u-u',v-v'-u^\tau u'+u'^\tau u') = x_a(u,v+u'^\tau u-u^\tau u'+u'^\tau u')$ Or $2\omega(u) \geq \min(\omega(v),\omega(^\tau v)) = \omega(v) \geq 2l$ et $2\omega(u') \geq \min(\omega(v'),\omega(^\tau v')) = \omega(v) > 2l$ Donc $\omega(v+u'^\tau u-u^\tau u'+u'^\tau u') \geq \min(v, 2\omega(u'), \omega(u)+\omega(u')) \geq 2l$

De même, U_{2a,l^+} est un sous-groupe distingué de $U_{2a,l}$.

Plus précisément, on pourrait montrer que $X_{a,l} = \mathfrak{U}_{a,l}(\kappa_K)$.

$U_{2a,2l}$ est un sous-groupe de $U_{a,l}$ et le morphisme de groupes canonique $U_{2a,2l} \to X_{a,l}$ a pour noyau $U_{2a,2l^+}$. Donc $X_{2a,2l}$ est un sous-κ_K-espace vectoriel de $X_{a,l}$.

$$
\begin{aligned}
l \in \Gamma'_a \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \mathbf{u} \in U_{a,l}\, \varphi_a(\mathbf{u}) = l = \sup \varphi_a(\mathbf{u}U_{2a}(K)) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists (u,v) \in H_0(L,K)\, \varphi_a(v) = l \text{ et } \forall v'' \in L_0\, \varphi_a(v) \geq \varphi_a(v+v'') \\
&\Leftrightarrow \quad \exists (u,v) \in H_0(L,K)\, \varphi_a(v) = l \text{ et } \forall v'' \in L_0\, x_a(u,v-v'') \notin U_{a,l^+} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists \mathbf{u} \in U_{a,l}\, \forall \mathbf{u}'' \in U_{2a}(K)\, \mathbf{u}\mathbf{u}'' \notin U_{a,l^+} \\
&\Leftrightarrow \quad U_{a,l} \not\subset U_{a,l^+}U_{2a}(K) \\
&\Leftrightarrow \quad U_{a,l} \neq U_{a,l^+} \text{ et } \exists \mathbf{u} \in U_{a,l}\, \forall \mathbf{u}'' \in U_{2a}(K)\, \mathbf{u}\mathbf{u}'' \notin U_{a,l^+} \\
&\Leftrightarrow \quad X_{a,l} \neq 0 \text{ et } X_{a,l} \neq X_{2a,2l} \\
&\Leftrightarrow \quad d(a+l) \neq 0
\end{aligned}
$$

□

Les racines étant les $a+l$ avec $l \in \Gamma'_a$ et les $2a+l'$ avec $l' \in \Gamma'_{2a}$, les murs sont les $\frac{1}{2}a^\vee \otimes (-l)$ pour $l \in \Gamma'_a$ et les $\frac{1}{2}a^\vee \otimes (-\frac{1}{2}l')$ avec $l' \in \Gamma'_{2a}$. On cherche donc à déterminer $\Gamma'_a \cup \frac{1}{2}\Gamma'_{2a}$.

3.3.2 Lemme. *Il existe des éléments $t \in L$, $r,s \in K$ tels que $K[t] = L$ et $t^2 = rt - s$ vérifiant les propriétés :*

- *Si L/K est non ramifiée, $\omega(s) = 0$.*
- *Si L/K est ramifiée, s est une uniformisante de K.*
- *$r = 0$ ou $\omega(s) \leq \omega(r) < \omega(2)$ ou $0 < \omega(s) \leq \omega(r) = \omega(2)$*

Démonstration. Si L/K est non ramifiée, on a $\omega(\pi_L) = \omega(\pi_K)$ et $[\kappa_L : \kappa_K] = 2$. Soit $t \in \mathcal{O}_L$ tel que $\bar{t} = t \mod \pi_L\mathcal{O}_L \in \kappa_L$ vérifie $\kappa_K[\bar{t}] = \kappa_L$. On a donc $K[t] = L$ et on écrit $t^2 - rt + s = 0$. Remarquons que $s = N_{L/K}(t)$ et $r = \mathrm{Tr}_{L/K}(t)$. En particulier, $s, r \in \mathcal{O}_K$. On a $\omega(s) = 2\omega(t) = 0$. Si $r \neq 0$ et $\omega(r) \geq \omega(2)$, en particulier $\mathrm{car}(K) \neq 2$ et $\frac{r}{2} \in \mathcal{O}_K$. On pose $t' = t - \frac{r}{2} \in \mathcal{O}_L$. Ceci change r en $r' = 0$ et s en $s' = s - \frac{r^2}{4}$ et $\omega(s') = 2\omega(t') = 0$ reste vrai.

Si L/K est ramifiée, on a $\omega(\pi_L) = \frac{1}{2}\omega(\pi_K)$ et $[\kappa_L : \kappa_K] = 1$. On pose $t = \pi_L$. On a bien $K[t] = L$ et on écrit $t^2 - rt + s = 0$. Remarquons que $s = N_{L/K}(t)$ et $r = \mathrm{Tr}_{L/K}(t)$. On a bien $\omega(s) = 2\omega(t) = 2\omega(\pi_L) = \omega(\pi_K)$. Donc s est une uniformisante de K. Si $r \neq 0$ et $\omega(r) > \omega(2)$, en particulier $\mathrm{car}(K) \neq 2$ et $\frac{r}{2} \in \mathcal{O}_K$, donc $\omega(\frac{r}{2}) > \omega(t)$. On pose $t' = t - \frac{r}{2} \in \mathcal{O}_L$. $\omega(t') = \min(\omega(t), \omega(\frac{r}{2}) = \omega(t)$ car on est dans le cas d'égalité étant donné que c'est une somme de deux termes de valuations distinctes. Cela change r en $r' = 0$ et s en $s' = s - \frac{r^2}{4}$ qui conviennent alors. □

3.3.3 Remarque. Si $\mathrm{car}(K) = 2$, alors $r \neq 0$ sinon on contredirait la séparabilité de l'extension L/K.

On note $L_0 = \{v \in L\,,\, \mathrm{Tr}_{L/K}(v) = 0\}$,
$L_1 = \{v \in L\,,\, \mathrm{Tr}_{L/K}(v) = 1\}$
et $L_1^{\max} = \{v \in L_1\,,\, \omega(v) = \sup(\omega(L_1))\}$.

3.3.4 Lemme. *Si $r = 0$, on a $L_0 = tK$ et $L_1 = \frac{1}{2} + tK$ et $\frac{1}{2} \in L_1^{\max}$.*

Si $r \neq 0$, on a $L_0 = (1 - 2tr^{-1})K$ et $L_1 = tr^{-1} + (1 - 2tr^{-1})K$ et $tr^{-1} \in L_1^{\max}$.

Démonstration. Écrire $x = at + b$ avec $a, b \in K$ donne les résultats pour L_0 et L_1.

Remarquons que $\forall x, y \in K\, \omega(x+ty) = \min(\omega(x), \omega(t)+\omega(y))$. En effet, si L/K et ramifiée, on a $\omega(ty) \neq \omega(x)$. Si L/K est non ramifiée, si $\omega(x) < \omega(y)$ c'est bon. Sinon,$\omega(x) \geq \omega(y)$ donc $xy^{-1} \in \mathcal{O}_K$. Si par l'absurde $\omega(t+xy^{-1}) > \min(\omega(t), \omega(x) - \omega(y))$, alors $t + xy^{-1} \in \pi_L \mathcal{O}_L$. Donc t et xy^{-1} ont même image dans κ_L. Contradiction avec $t \notin \mathcal{O}_K$.

Lorsque $r = 0$, on a $\forall x \in K\, \omega(\frac{1}{2} + tx) = \min(\omega(\frac{1}{2}), \omega(t) + \omega(x)) \leq \omega(\frac{1}{2})$. D'où le résultat.

Lorsque $r \neq 0$, on a pour tout $x \in K$,

$$\begin{aligned} \omega(tr^{-1} + (1 - 2tr^{-1})x) &= \omega(x + t(r^{-1} - 2r^{-1}x)) \\ &= \min(\omega(x), \omega(tr^{-1}) + \omega(1 - 2x)) \\ &\leq \omega(tr^{-1}) \end{aligned}$$

Sinon, on aurait $\omega(x) > \omega(tr^{-1})$ et $\omega(1-2x) > 0$. Comme $\omega(1) = 0$, on aurait donc $0 = \omega(2x) = \omega(x) + \omega(2)$. Donc $-\omega(x) = \omega(2) < \omega(rt^{-1})$. Contradiction avec les hypothèses faites sur r et t. □

Revenons aux Γ et Γ'.

On note $\delta = \omega(L_1^{\max})$

On a $\Gamma'_{2a} = \omega(L_0^{\times})$.

3.3.5 Proposition.
- *Si L/K est non ramifiée, on a $\Gamma'_{2a} = \Gamma_K$.*
- *Si L/K est ramifiée, on a $\Gamma'_{2a} = \delta + \omega(\pi_L) + \Gamma_K$. Plus précisément,*
  - *si $r = 0$, on a $\Gamma'_{2a} = \frac{1}{2}\omega(\pi_K) + \Gamma_K = \frac{\omega(\pi_K)}{2}(1 + 2\mathbb{Z})$*
  - *si $r \neq 0$, on a $\Gamma'_{2a} = \Gamma_K = \frac{\omega(\pi_K)}{2}(2\mathbb{Z})$*

Démonstration. Le cas non ramifié est clair.

Dans le cas ramifié, on montre que $\delta \notin \Gamma'_{2a}$. Par l'absurde, supposons que $\delta \in \Gamma'_{2a}$. Par définition de Γ'_{2a}, il existerait $y \in L_0$ tel que $\delta = \omega(y)$. Par définition de δ, il existe $x \in L_1$ tel que $\delta = \omega(x)$. Donc $\omega(xy^{-1}) = 0$. Comme L/K est ramifiée, il existe $z \in \mathcal{O}_K^{\times}$ tel que $xy^{-1} = z \mod \pi_L \mathcal{O}_K$. On pose $y' = yz \in L_0$ de sorte que $\omega(xy^{-1} - z) = \omega(x(y')^{-1} - 1) > 0$. Comme $x + y' \in L_1$, on a $\omega(x + y') = \omega(y') + \omega(xy'^{-1} - 1) > \delta$. Contradiction avec la maximalité de δ.

Pour la distinction en fonction de r :
- si $r = 0$, on a $\delta = \omega(\frac{1}{2}) \in \Gamma_K$
- si $r \neq 0$, on a $\omega(rt^{-1}) < \omega(2)$. Donc $\omega(1 - 2tr^{-1}) = \min(\omega(1), \omega(2) - \omega(rt^{-1})) = 0$.

□

3.3.6 Proposition. *On a $\Gamma'_a = \frac{1}{2}\delta + \Gamma_L$*

Plus précisément,
- *Si L/K est non ramifiée, alors $\Gamma'_a = \frac{\omega(\pi_K)}{2} + \Gamma_K$*
- *Si L/K est ramifiée,*
  - *Si $r = 0$, on a $\Gamma'_a = \frac{1}{2}\Gamma_K = \frac{\omega(\pi_K)}{4}(2\mathbb{Z})$*
  - *Si $r \neq 0$, on a $\Gamma'_a = \frac{1}{4}\omega(\pi_K) + \frac{1}{2}\Gamma_K = \frac{\omega(\pi_K)}{4}(1 + 2\mathbb{Z})$*

Démonstration. Soit $(u, v) \in H_0(L, K)$ tel que $\varphi_a(x_a(u, v)) = \sup \varphi_a(x_a(u, v)U_{2a}(K))$.

Montrons d'abord que si $\lambda \in L_1^{\max}$ alors pour tout $x \in K$ et tout $y \in L_0$, on a $\omega(x\lambda + y) = \min(\omega(y), \omega(x\lambda))$.

Si $x = 0$, c'est vrai. Supposons désormais $x \in K^\times$. Alors $\lambda + yx^{-1} \in L_1$. Donc par définition de $L_1^{\max}$, on a $\omega(\lambda) \geq \omega(\lambda + yx^{-1})$. Donc $\omega(x\lambda) \geq \omega(x\lambda + y)$
De plus, $\omega(y) = \omega(y + x\lambda - x\lambda) \geq \min(\omega(y + x\lambda), \omega(-x\lambda) = \omega(y + x\lambda)$ car $\omega(-x\lambda) \geq \omega(x\lambda) \geq \omega(x\lambda + y)$
Donc $\min(\omega(y), \omega(x\lambda)) = \omega(y + x\lambda)$.

Fixons un $\lambda \in L_1^{\max}$. On remarque que $(u, \lambda u^\tau u) \in H_0(L, K)$ et $v - \lambda u^\tau u \in L_0$ avec $u^\tau u \in K$. On écrit $x_a(u, v) = x_a(u, \lambda u^\tau u) x_a(0, v - \lambda u^\tau u)$ Pour tout $v' \in L_0$, on a donc

$$\begin{array}{rcl} \omega(v + v') & = & \omega((v + v' - \lambda u^\tau u) + \lambda(u^\tau u)) \\ & = & \min(\omega(v + v' - \lambda u^\tau u), \delta + 2\omega(u)) \\ & \leq & \delta + 2\omega(u) \end{array}$$

avec égalité pour $v' = \lambda u^\tau u - v$. Donc $\varphi_a(x_a(u, v)) = \delta + 2\omega(u)$. Donc $\Gamma'_a \subset \frac{1}{2}\delta + \Gamma_L$

Réciproquement, pour tout $u \in L^\times$, on a $(u, \lambda u^\tau u \in H_0(L, K)$ et $\mathbf{u} = x_a(u, v)$ vérifie bien $\varphi_a(\mathbf{u}) = \sup \varphi_a(\mathbf{u} U_{2a}(K))$

D'où le résultat $\Gamma'_a = \frac{1}{2}\delta + \Gamma_L$.

Supposons L/K non ramifiée.
Comme $\Gamma'_a \cap \Gamma'_{2a} = \emptyset$, on a $\delta \in \Gamma_K \setminus 2\Gamma_K$. D'où le résultat.

Supposons L/K ramifiée.
Si $r = 0$, alors $\delta = \omega(2) \in \Gamma_K$ d'où le résultat.
Si $r \neq 0$, alors $\delta = \omega(r) - \omega(t) \in \omega(\pi_L) + \Gamma_K$. D'où le résultat.

$\square$

Table des matières