Mathématiques et Jeux déterministes

Benoit Loisel

Université de Poitiers

Mardi 4 avril 2023

Université de Poitiers

Mathématiques

FACULTÉ DES SCIENCES FONDAMENTALES ET APPLIQUÉES UNIVERSITÉ DE POITIERS

Avant-propos

C'est quoi un jeu ?

Avant-propos

C'est quoi un jeu ?

Définition (D'après TLFI)

[...]
I.A.3. Activité ludique organisée autour d'une partie comportant généralement **des règles, des gagnants et des perdants.** [...]
MATH. Théorie des jeux. Théorie mathématique qui cherche à **définir un comportement rationnel des joueurs**, par l'analyse de leurs décisions [...]
I.A.4. Distraction, délassement faisant plus spécialement appel aux **facultés de mémoire et d'érudition**. [...]
I.B. Activité intéressée, fondée sur l'adresse ou **le hasard**, réservée aux adultes qui engagent une certaine somme dans l'espoir de **réaliser des gains** plus ou moins importants. [...]

Outline

1. Jeux construits à partir d'un un modèle mathématique
   - Jeu de Dobble
   - Jeu de Set
2. Jeux à stratégie déterministe
   - Exemple classique : le jeu de Nim
   - Notion de stratégie gagnante
   - Sans décrire la stratégie
   - Cas de match nul
3. Jeux simultanés
   - Le Dilemme du prisonnier
   - Notion d'équilibre
   - Pierre-Feuille-Ciseaux

Règles du jeu de Dobble

1.Se débarrasser de ses cartes
2. Prendre toutes les cartes
Avec tour centrale :
3.prendre le plus de cartes
4. Poser ses cartes en premier

<u>Condition :</u>
Toute paire de cartes admet un, et un seul, symbole en commun.

Comment réaliser un tel jeu de cartes ?

Conditions à respecter : Toute paire de cartes admet un (existence), et un seul (unicité), symbole en commun.

Qui se réalise lorsque :

- On a un ensemble de symboles $\mathcal{S}$,
- et un ensemble de cartes $\mathcal{C}$ tels que
- chaque carte est un sous-ensemble de symboles dans $\mathcal{S}$, de cardinal fixé, et vérifiant :
  1. Étant donnés 2 symboles distincts, il y a au plus une carte qui les contient (unicité) ;
  2. 2 cartes ont toujours au moins un symbole en commun (existence) ;

Comment réaliser un tel jeu de cartes ?

Conditions à respecter : Toute paire de cartes admet un (existence), et un seul (unicité), symbole en commun.

Qui se réalise lorsque :

- On a un ensemble de symboles $\mathcal{S}$,
- et un ensemble de cartes $\mathcal{C}$ tels que
- chaque carte est un sous-ensemble de symboles dans $\mathcal{S}$, de cardinal fixé, et vérifiant :
  1. Étant donnés 2 symboles distincts, il y a au plus une carte qui les contient (unicité) ;
  2. 2 cartes ont toujours au moins un symbole en commun (existence) ;

Symbole = Point   Droite = Carte.

Comment réaliser un tel jeu de cartes ?

Conditions à respecter : Toute paire de cartes admet un (existence), et un seul (unicité), symbole en commun.

Qui se réalise lorsque :

- On a un ensemble de **points** $\mathcal{P}$,
- et un ensemble de **droites** $\mathcal{D}$ tels que
- chaque carte est un sous-ensemble de symboles dans $\mathcal{S}$, de cardinal fixé, et vérifiant :
  1. Étant donnés 2 symboles distincts, il y a au plus une carte qui les contient (unicité) ;
  2. 2 cartes ont toujours au moins un symbole en commun (existence) ;

Symbole = Point Droite = Carte.

Comment réaliser un tel jeu de cartes ?

Conditions à respecter : Toute paire de cartes admet un (existence), et un seul (unicité), symbole en commun.

Qui se réalise lorsque :

- On a un ensemble de **points** $\mathcal{P}$,
- et un ensemble de **droites** $\mathcal{D}$ tels que
- chaque **droite** est un sous-ensemble de **points** dans $\mathcal{P}$, de cardinal fixé, et vérifiant :
  1. Étant donnés 2 symboles distincts, il y a au plus une carte qui les contient (unicité) ;
  2. 2 cartes ont toujours au moins un symbole en commun (existence) ;

Symbole = Point Droite = Carte.

Comment réaliser un tel jeu de cartes ?

Conditions à respecter : Toute paire de cartes admet un (existence), et un seul (unicité), symbole en commun.

Qui se réalise lorsque :

- On a un ensemble de **points** $\mathcal{P}$,
- et un ensemble de **droites** $\mathcal{D}$ tels que
- chaque **droite** est un sous-ensemble de **points** dans $\mathcal{P}$, de cardinal fixé, et vérifiant :
  1. Étant donnés 2 **points** distincts, il y a au plus une **droite** qui les contient (unicité) ;
  2. 2 cartes ont toujours au moins un symbole en commun (existence) ;

Symbole = Point   Droite = Carte.

Comment réaliser un tel jeu de cartes ?

Conditions à respecter : Toute paire de cartes admet un (existence), et un seul (unicité), symbole en commun.

Qui se réalise lorsque :

- On a un ensemble de **points** $\mathcal{P}$,
- et un ensemble de **droites** $\mathcal{D}$ tels que
- chaque **droite** est un sous-ensemble de **points** dans $\mathcal{P}$, de cardinal fixé, et vérifiant :
    1. Étant donnés 2 **points** distincts, il y a au plus une **droite** qui les contient (unicité) ;
    2. 2 **droites** ont toujours au moins un **point** en commun (existence) ;

Symbole = Point   Droite = Carte.

Comment réaliser un tel jeu de cartes ?

Conditions à respecter : Toute paire de cartes admet un (existence), et un seul (unicité), symbole en commun.

Qui se réalise lorsque :

- On a un ensemble de **points** $\mathcal{P}$,
- et un ensemble de **droites** $\mathcal{D}$ tels que
- chaque **droite** est un sous-ensemble de **points** dans $\mathcal{P}$, de cardinal fixé, et vérifiant :
  1. Étant donnés 2 **points** distincts, il y a au plus une **droite** qui les contient (unicité) ;
  2. 2 **droites** ont toujours au moins un **point** en commun (existence) ;

$\oplus$ non-dégénérescence : il existe 4 points qui sont 3 à 3 non-alignés.

Comment réaliser un tel jeu de cartes ?

Conditions à respecter : Toute paire de cartes admet un (existence), et un seul (unicité), symbole en commun.

Qui se réalise lorsque :

- On a un ensemble de **points** $\mathcal{P}$,
- et un ensemble de **droites** $\mathcal{D}$ tels que
- chaque **droite** est un sous-ensemble de **points** dans $\mathcal{P}$, de cardinal fixé, et vérifiant :
  1. Étant donnés 2 **points** distincts, il y a **exactement** une **droite** qui les contient (unicité) ;
  2. 2 **droites** ont toujours **exactement** un **point** en commun (existence) ;

$\oplus$ non-dégénérescence : il existe 4 points qui sont 3 à 3 non-alignés.

$\oplus$ complétion du jeu : les ensembles sont les plus grands possibles.

Des droites finies...

On prend p premier et $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ corps fini à p-éléments.
$\mathcal{P} = K^2$ ensemble de points
Droite passant par $a \in K^2$ dirigée par $v \in K^2 \setminus \{0\}$:

$$d_{a,v} = \{a + tv \mid t \in K\}.$$

Ensemble de droites

$$\mathcal{D} = \left\{d_{a,v} \mid a \in K^2,\ v \in K^2 \setminus \{0\}\right\}.$$

Des droites finies...

On prend p premier et $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ corps fini à p-éléments.
$\mathcal{P} = K^2$ ensemble de points
Droite passant par $a \in K^2$ dirigée par $v \in K^2 \setminus \{0\}$:

$$d_{a,v} = \{a + tv \mid t \in K\}.$$

Ensemble de droites

$$\mathcal{D} = \left\{d_{a,v} \mid a \in K^2,\ v \in K^2 \setminus \{0\}\right\}.$$

Mais $d_{a,v} = d_{b,w} \iff \exists t \in K^*,\ w = tv\ \text{ et } \exists s \in K,\ b = a + sv$.
On a donc en fait

$$\frac{\#K^2 \# K^2 \setminus \{0\}}{\#K \# K^*} = \frac{p^2(p^2-1)}{p(p-1)} = p^2 + p \text{ droites.}$$

...qui vérifient les axiomes...

Par deux points du plan, il passe une unique droite : OK

...qui vérifient les axiomes...

Par deux points du plan, il passe une unique droite : OK

Deux droites se rencontre en un unique point...

...qui vérifient les axiomes...

Par deux points du plan, il passe une unique droite : OK

Deux droites se rencontre en un unique point...

...sauf si elles sont parallèles !

...qui vérifient les axiomes...

Par deux points du plan, il passe une unique droite : OK

Deux droites se rencontre en un unique point...

...sauf si elles sont parallèles !

Vraiment ! ?

…à condition qu'elles se rencontrent “à l'infini”

Viticulture chilienne, quelque part entre Talca et Santiago, juillet 2018.

Combien de directions de droites dans K^2 ?

On a $\#K^2 \setminus = p^2 - 1$ vecteurs directeurs...

Combien de directions de droites dans K^2 ?

On a $\#K^2 \setminus = p^2 - 1$ vecteurs directeurs...

...mais il faut identifier ceux qui sont colinéaires entre eux.

Si $0 \neq v \in K^2$, les colinéaires sont tv pour $t \in K^*$. Il y en a $\#K^* = p - 1$.

Au total, le nombre de direction de droites est :

$$\frac{p^2 - 1}{p - 1} = p + 1$$

Géométrie projective finie

Modèle :

- On rajoute à $\mathcal{P}$ un ensemble de points "à l'infini" $\mathcal{P}_\infty$ qui sont les "directions de droites".
- À chaque droite d, on rajoute sa direction $v_d \in \mathcal{P}_\infty$.
- On rajoute une droite "à l'infini" constituée des direction.

Géométrie projective finie

Modèle :

- On rajoute à $\mathcal{P}$ un ensemble de points "à l'infini" $\mathcal{P}_\infty$ qui sont les "directions de droites".
- À chaque droite d, on rajoute sa direction $v_d \in \mathcal{P}_\infty$.
- On rajoute une droite "à l'infini" constituée des direction.

On a alors :

- Chaque droite a exactement $p+1$ points;
- Toute paire de points est dans une unique droite.
- Deux droites se rencontrent toujours en un unique point.
- Les points $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ sont 3 à 3 non alignés.

De plus, il y a le même nombre de droites p^2+p+1 que de points.

Le jeu du Dobble commercialisé

Il y a effectivement $7^2 + 7 + 1 = 57$ symboles différents,

mais seulement 55 cartes.

Exercice : Trouver les deux cartes "manquantes".

Le jeu du Dobble commercialisé

Il y a effectivement $7^2 + 7 + 1 = 57$ symboles différents,

mais seulement 55 cartes.

<u>Exercice :</u> Trouver les deux cartes "manquantes".

Construction plus abstraite :

$$\mathcal{P} = \mathbb{P}^2(K) = \frac{K^3 \setminus \{0\}}{K^*} = \{ \text{ droites vectorielles } \}$$

$$\mathcal{D} = \{ \text{ plans vectoriels } \}$$

Quelques questions

1. Est-il possible de construire d'autres modèles “maximaux” du jeu de Dobble “non-isomorphes” ?
   Rép : Oui, dans ce cas le nombre de cartes et de symboles sont égaux et de la forme $n^2 + n + 1$.
   On sait faire lorsque n est la puissance d'un nombre premier.
   Conjecture : n est forcément un nombre premier.
2. Peut-on remplacer la condition

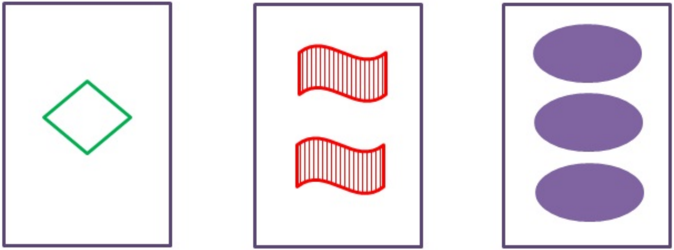
   “exactement 1 symbole en commun entre deux cartes”

   par

   “exactement k symboles en commun entre deux cartes”

   pour $k \geqslant 2$?
3. Si le nombre de cartes/symboles est $p^2 + p + 1$ avec p premier, combien de jeux différents peut-on faire ?

Jeu du Set



Définition d'un "Set"

Définition

Un set est un ensemble de 3 cartes telles que :

- Les formes (losange, vague, ellipse) sont toutes égales ou distinctes ;
- Les remplissages (vide, hachuré, plein) sont tous égaux ou distincts ;
- Les couleurs (rouge, vert, violet) sont toutes égales ou distinctes ;
- Les nombres (un, deux, trois) sont tous égaux ou distincts.

Contraintes supplémentaires du jeu Set :

- Toutes les cartes sont distinctes.
- Toutes les combinaisons de paramètres apparaissent.

Définition d'un "Set"

Définition

Un set est un ensemble de 3 cartes telles que :

- Les formes (losange, vague, ellipse) sont toutes égales ou distinctes ;
- Les remplissages (vide, hachuré, plein) sont tous égaux ou distincts ;
- Les couleurs (rouge, vert, violet) sont toutes égales ou distinctes ;
- Les nombres (un, deux, trois) sont tous égaux ou distincts.

Contraintes supplémentaires du jeu Set :

- Toutes les cartes sont distinctes.
- Toutes les combinaisons de paramètres apparaissent.

Question : combien y a-t-il de cartes ?

Modèle du jeu “Set”

Réponse : $3^4 = 81$.

Modèle du jeu “Set”

Réponse : $3^4 = 81$.

$K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Une carte est un élément de K^4.

Un “Set” est une droite de K^4.

Quelques questions possibles

1. Quelle est la probabilité que 3 cartes au hasard forment un Set ?

Quelques questions possibles

1. Quelle est la probabilité que 3 cartes au hasard forment un Set ?
   Réponse : $\frac{1}{79}$

Quelques questions possibles

1. Quelle est la probabilité que 3 cartes au hasard forment un Set ?
   Réponse : $\frac{1}{79}$
2. Combien y a-t-il de sets dans le jeu ? *Réponse :* $\frac{81 \times 80}{3!} = 1080$

Quelques questions possibles

1. Quelle est la probabilité que 3 cartes au hasard forment un Set ? *Réponse :* $\frac{1}{79}$
2. Combien y a-t-il de sets dans le jeu ? *Réponse :* $\frac{81\times 80}{3!} = 1080$
3. Et si on remplace les Sets (=droites) par des plans de K^4 ?
4. Et si on remplace les Sets (=droites) par des sous-espaces de dimension 3 de K^4 ?

Quelques questions possibles

1. Quelle est la probabilité que 3 cartes au hasard forment un Set ? *Réponse :* $\frac{1}{79}$
2. Combien y a-t-il de sets dans le jeu ? *Réponse :* $\frac{81 \times 80}{3!} = 1080$
3. Et si on remplace les Sets (=droites) par des plans de K^4 ?
4. Et si on remplace les Sets (=droites) par des sous-espaces de dimension 3 de K^4 ?
5. Combien de cartes faut-il pour être sûr d'avoir un Set dedans ?

Outline

Définition (Règle du jeu)

Le jeu de Nim est constitué **initialement** de N_0 billes, avec $N_0 \in \mathbb{N}^*$. Deux joueurs doivent retirer chacun leur tour 1, 2 ou 3 billes et en laisser au moins 1. Le premier joueur qui ne peut plus effectuer d'action a perdu et l'autre a gagné.

- Si on laisse 1 bille à l'adversaire...

Définition (Règle du jeu)

Le jeu de Nim est constitué **initialement** de N_0 billes, avec $N_0 \in \mathbb{N}^*$. Deux joueurs doivent retirer chacun leur tour 1, 2 ou 3 billes et en laisser au moins 1. Le premier joueur qui ne peut plus effectuer d'action a perdu et l'autre a gagné.

- Si on laisse 1 bille à l'adversaire...
- Si on laisse 2, 3 ou 4 billes à l'adversaire...

Définition (Règle du jeu)

Le jeu de Nim est constitué **initialement** de N_0 billes, avec $N_0 \in \mathbb{N}^*$. Deux joueurs doivent retirer chacun leur tour 1, 2 ou 3 billes et en laisser au moins 1. Le premier joueur qui ne peut plus effectuer d'action a perdu et l'autre a gagné.

- Si on laisse 1 bille à l'adversaire...
- Si on laisse 2, 3 ou 4 billes à l'adversaire...
- Si on laisse 5 billes à l'adversaire...

Définition (Règle du jeu)

Le jeu de Nim est constitué **initialement** de N_0 billes, avec $N_0 \in \mathbb{N}^*$. Deux joueurs doivent retirer chacun leur tour 1, 2 ou 3 billes et en laisser au moins 1. Le premier joueur qui ne peut plus effectuer d'action a perdu et l'autre a gagné.

- Si on laisse 1 bille à l'adversaire...
- Si on laisse 2, 3 ou 4 billes à l'adversaire...
- Si on laisse 5 billes à l'adversaire...
- Si on laisse 6, 7 ou 8 billes à l'adversaire...

Définition (Règle du jeu)

Le jeu de Nim est constitué **initialement** de N_0 billes, avec $N_0 \in \mathbb{N}^*$. Deux joueurs doivent retirer chacun leur tour 1, 2 ou 3 billes et en laisser au moins 1. Le premier joueur qui ne peut plus effectuer d'action a perdu et l'autre a gagné.

- Si on laisse 1 bille à l'adversaire...
- Si on laisse 2, 3 ou 4 billes à l'adversaire...
- Si on laisse 5 billes à l'adversaire...
- Si on laisse 6, 7 ou 8 billes à l'adversaire...
- Si on laisse 9 billes à l'adversaire...

Définition (Règle du jeu)

Le jeu de Nim est constitué **initialement** de N_0 billes, avec $N_0 \in \mathbb{N}^*$. Deux joueurs doivent retirer chacun leur tour 1, 2 ou 3 billes et en laisser au moins 1. Le premier joueur qui ne peut plus effectuer d'action a perdu et l'autre a gagné.

- Si on laisse 1 bille à l'adversaire...
- Si on laisse 2, 3 ou 4 billes à l'adversaire...
- Si on laisse 5 billes à l'adversaire...
- Si on laisse 6, 7 ou 8 billes à l'adversaire...
- Si on laisse 9 billes à l'adversaire...

Constats :

- Le premier joueur peut gagner **quoi que fasse son adversaire** si $N_0 \not\equiv 1 \mod 4$.
- Le deuxième joueur peut gagner **quoi que fasse son adversaire** si $N_0 \equiv 1 \mod 4$.

On dit que le jeu est **à stratégie gagnante** car si les deux joueurs jouent "parfaitement bien", on peut deviner lequel des deux va gagner uniquement à partir des conditions initiales.

Constats :

- Le premier joueur peut gagner **quoi que fasse son adversaire** si $N_0 \not\equiv 1 \mod 4$.
- Le deuxième joueur peut gagner **quoi que fasse son adversaire** si $N_0 \equiv 1 \mod 4$.

On dit que le jeu est **à stratégie gagnante** car si les deux joueurs jouent “parfaitement bien”, on peut deviner lequel des deux va gagner uniquement à partir des conditions initiales.

Description de la stratégie :

Lorsque le jeu est dans l'état « $n \geqslant 2$ billes restantes », on note $r \in \{1, 2, 3, 4\}$ l'entier tel que $n \equiv r \mod 4$.

- Si $r = 1$, on retire 1 bille.
- Sinon, on retire $r - 1 \in \{1, 2, 3\}$ billes, de sorte qu'il restera $n' = n + 1 - r \equiv 1 \mod 4$ billes.

C'est quoi une stratégie ?

C'est quoi une stratégie ?

Définition (D'après TLFI)

B.2.c) [Dans la théorie des jeux] Ensemble cohérent de décisions que se propose de prendre un agent assumant des responsabilités, face aux diverses éventualités qu'il est conduit à envisager, tant du fait des circonstances extérieures qu'en vertu d'hypothèses portant sur le comportement d'autres agents intéressés par de telles décisions.

C'est quoi une stratégie ?

Définition (D'après TLFI)

B.2.c) [Dans la théorie des jeux] Ensemble cohérent de décisions que se propose de prendre un agent assumant des responsabilités, face aux **diverses éventualités** qu'il est conduit à envisager, tant du fait des circonstances extérieures qu'en vertu d'hypothèses portant sur le comportement d'autres agents intéressés par de telles décisions.

Définition d'un jeu à stratégie

Hypothèses pour aujourd'hui :

- Il y a deux joueurs.
- Les règles du jeu sont parfaitement connues des joueurs.
- Les règles ne dépendent pas des actions des joueurs.
- Les joueurs jouent chacun leur tour.
- Les actions déjà effectuées sont connues des joueurs.
- (facultatif) Il n'y a pas de match nul.
- (facultatif) Le jeu se termine forcément.

Un modèle possible :

Définition d'un jeu à stratégie

Hypothèses pour aujourd'hui :

- Il y a deux joueurs.
- Les règles du jeu sont parfaitement connues des joueurs.
- Les règles ne dépendent pas des actions des joueurs.
- Les joueurs jouent chacun leur tour.
- Les actions déjà effectuées sont connues des joueurs.
- (facultatif) Il n'y a pas de match nul.
- (facultatif) Le jeu se termine forcément.

Un modèle possible :

- Un ensemble $\mathcal{E}$ d'états du jeu.
- Un état initial du jeu $e_i \in E$.
- Un sous-ensemble d'états perdants $E_F \subseteq \mathcal{E}$.
- Une règle du jeu = un ensemble de "coups possibles"
  C'est un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telles que $f(E_F) \subseteq E_F$.

Exemple du jeu de Nim

On prend :

- $\mathcal{E} = [\![1, N_0]\!] = \{1, 2, \ldots, N_0\}$.
- $e_i = N_0$
- $E_F = \{1\}$
- $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ où

$$f_1 : \begin{array}{ccc} [\![1, N_0]\!] & \to & [\![1, N_0]\!] \\ x & \mapsto & \begin{cases} x-1 & \text{si } x>2 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

$$f_2 : \begin{array}{ccc} [\![1, N_0]\!] & \to & [\![1, N_0]\!] \\ x & \mapsto & \begin{cases} x-2 & \text{si } x>3 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} [\![1, N_0]\!] & \to & [\![1, N_0]\!] \\ x & \mapsto & \begin{cases} x-3 & \text{si } x>4 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Notion de partie

Une partie, c'est alors la donnée de deux suites de fonction (u_n, v_n) telles que $u_n, v_n \in \mathcal{F}$ de sorte que les états successifs du jeu sont :

$$e_i \in \mathcal{E}$$

Notion de partie

Une partie, c'est alors la donnée de deux suites de fonction (u_n, v_n) telles que $u_n, v_n \in \mathcal{F}$ de sorte que les états successifs du jeu sont :

$$u_0(e_i) \in \mathcal{E}$$

Notion de partie

Une partie, c'est alors la donnée de deux suites de fonction (u_n, v_n) telles que $u_n, v_n \in \mathcal{F}$ de sorte que les états successifs du jeu sont :

$$v_0 \circ u_0(e_i) \in \mathcal{E}$$

Notion de partie

Une partie, c'est alors la donnée de deux suites de fonction (u_n, v_n) telles que $u_n, v_n \in \mathcal{F}$ de sorte que les états successifs du jeu sont :

$$u_1 \circ v_0 \circ u_0(e_i) \in \mathcal{E}$$

Notion de partie

Une partie, c'est alors la donnée de deux suites de fonction (u_n, v_n) telles que $u_n, v_n \in \mathcal{F}$ de sorte que les états successifs du jeu sont :

$$v_1 \circ u_1 \circ v_0 \circ u_0(e_i) \in \mathcal{E}$$

Notion de partie

Une partie, c'est alors la donnée de deux suites de fonction (u_n, v_n) telles que $u_n, v_n \in \mathcal{F}$ de sorte que les états successifs du jeu sont :

$$u_2 \circ v_1 \circ u_1 \circ v_0 \circ u_0(e_i) \in \mathcal{E}$$

Notion de partie

Une partie, c'est alors la donnée de deux suites de fonction (u_n, v_n) telles que $u_n, v_n \in \mathcal{F}$ de sorte que les états successifs du jeu sont :

$$v_2 \circ u_2 \circ v_1 \circ u_1 \circ v_0 \circ u_0(e_i) \in \mathcal{E}$$

Notion de partie

Une partie, c'est alors la donnée de deux suites de fonction (u_n, v_n) telles que $u_n, v_n \in \mathcal{F}$ de sorte que les états successifs du jeu sont :

$$u_3 \circ v_2 \circ u_2 \circ v_1 \circ u_1 \circ v_0 \circ u_0(e_i) \in \mathcal{E}$$

Notion de partie

Une partie, c'est alors la donnée de deux suites de fonction (u_n, v_n) telles que $u_n, v_n \in \mathcal{F}$ de sorte que les états successifs du jeu sont :

$$v_3 \circ u_3 \circ v_2 \circ u_2 \circ v_1 \circ u_1 \circ v_0 \circ u_0(e_i) \in \mathcal{E}$$

Notion de partie

Une partie, c'est alors la donnée de deux suites de fonction (u_n, v_n) telles que $u_n, v_n \in \mathcal{F}$ de sorte que les états successifs du jeu sont :

$$\ldots \circ u_4 \circ v_3 \circ u_3 \circ v_2 \circ u_2 \circ v_1 \circ u_1 \circ v_0 \circ u_0(e_i) \in \mathcal{E}$$

On note

$$j_1 = \inf \left\{ n \in \mathbb{N} \mid u_n \circ \prod_{k=0}^{n-1} v_k \circ u_k(e_i) \in E_F \right\}$$

$$j_2 = \inf \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \prod_{k=0}^{n-1} v_k \circ u_k(e_i) \in E_F \right\}$$

Si $j_1 = h_2 = +\infty$, le jeu ne termine pas.
Si $j_2 \leqslant j_1$, le deuxième joueur aura gagné la partie.
Si $j_2 > j_1$ le premier joueur aura gagné la partie.

Définition abstraite de stratégie gagnante

<u>Contrainte :</u> Une stratégie ne dépend que de l'état $\mathcal{E}$ du jeu.
Pour tout état non perdant, une stratégie peut être appliquée.

Définition abstraite de stratégie gagnante

Contrainte : Une stratégie ne dépend que de l'état $\mathcal{E}$ du jeu.
Pour tout état non perdant, une stratégie peut être appliquée.

Définition

Une **stratégie** est une fonction $s : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$.

On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des stratégies.

Définition

Une stratégie $s \in \mathcal{S}$ est **gagnante** pour le premier joueur si

Définition abstraite de stratégie gagnante

<u>Contrainte :</u> Une stratégie ne dépend que de l'état $\mathcal{E}$ du jeu.
Pour tout état non perdant, une stratégie peut être appliquée.

Définition

Une **stratégie** est une fonction $s : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$.

On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des stratégies.

Définition

Une stratégie $s \in \mathcal{S}$ est **gagnante** pour le premier joueur si $e_i \notin E_F$ et

Définition abstraite de stratégie gagnante

<u>Contrainte :</u> Une stratégie ne dépend que de l'état $\mathcal{E}$ du jeu.
Pour tout état non perdant, une stratégie peut être appliquée.

Définition

Une **stratégie** est une fonction $s : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$.

On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des stratégies.

Définition

Une stratégie $s \in \mathcal{S}$ est **gagnante** pour le premier joueur si $e_i \notin E_F$ et

$$\forall s' \in \mathcal{S},$$

Définition abstraite de stratégie gagnante

Contrainte : Une stratégie ne dépend que de l'état $\mathcal{E}$ du jeu.
Pour tout état non perdant, une stratégie peut être appliquée.

Définition

Une **stratégie** est une fonction $s : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$.

On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des stratégies.

Définition

Une stratégie $s \in \mathcal{S}$ est **gagnante** pour le premier joueur si $e_i \notin E_F$ et

$$\forall s' \in \mathcal{S}, \exists n \in \mathbb{N}, \ (s \circ s')^n \circ s(e_i) \in E_F$$

Définition abstraite de stratégie gagnante

Contrainte : Une stratégie ne dépend que de l'état $\mathcal{E}$ du jeu.
Pour tout état non perdant, une stratégie peut être appliquée.

Définition

Une **stratégie** est une fonction $s : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$.

On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des stratégies.

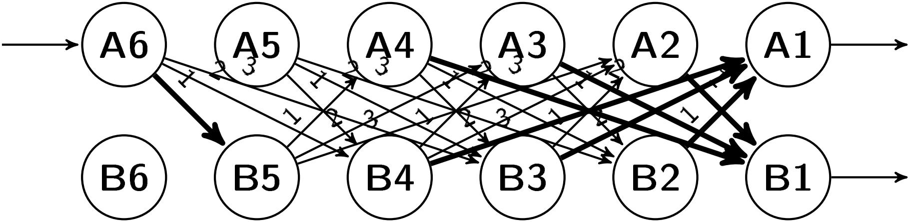
Définition

Une stratégie $s \in \mathcal{S}$ est **gagnante** pour le premier joueur si $e_i \notin E_F$ et

$$\forall s' \in \mathcal{S}, \exists n \in \mathbb{N}, \ (s \circ s')^n \circ s(e_i) \in E_F \text{ et } (s' \circ s)^n(e_i) \notin E_F$$

Exo : Définir une notion de stratégie gagnante pour le deuxième joueur.

Concrètement : utiliser un automate



Partie qui termine (1/2)

Théorème

Si les règles du jeu sont telles que toute partie se termine quelles que soient les stratégies des deux joueurs, alors il existe une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs.

Remarque

Étant donnée une condition initiale $e_i \in \mathcal{E}$, il y a un et un seul joueur pour lequel il y a une stratégie gagnante.

Dans le cas du jeu de Nim, la stratégie gagnante montre que le premier joueur a une stratégie gagnante si, et seulement si, $e_i \not\equiv 1 \mod 4$.

Partie qui termine (2/2)

Théorème

S'il existe $h : \mathcal{E} \to \mathbb{N}$ telle que

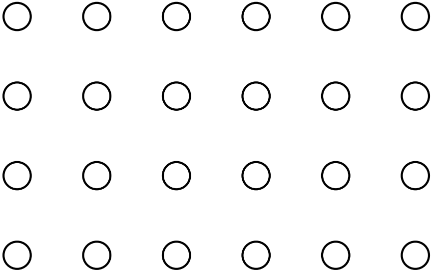
$$\forall f \in \mathcal{F},\ \forall e \in \mathcal{E} \setminus E_F,\ \ h\big(f(e)\big) < h(e),$$

alors toute partie se termine nécessairement.

C'est par exemple le cas du jeu de Nim.

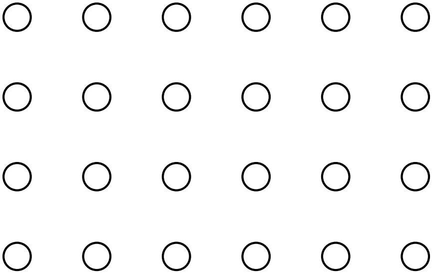
Jeu du chomp

Grille $a \times b$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$.
Tour à tour, enlever un rectangle en bas à droite.



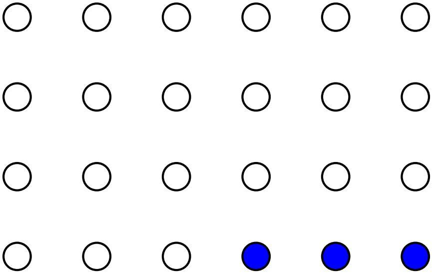
Exemple avec $a = 6, b = 4$

Jeu du chomp : Exemple de partie



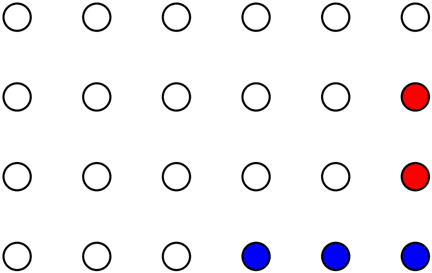
Bleu=enlevé par le joueur 1.
Rouge=enlevé par le joueur 2.

Jeu du chomp : Exemple de partie



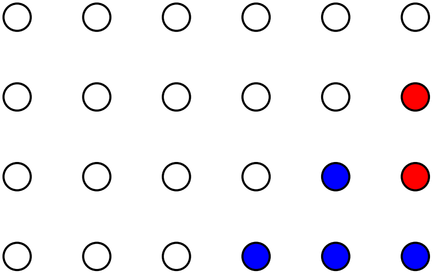
Bleu=enlevé par le joueur 1.
Rouge=enlevé par le joueur 2.

Jeu du chomp : Exemple de partie



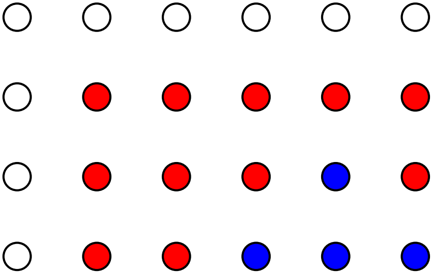
Bleu=enlevé par le joueur 1.
Rouge=enlevé par le joueur 2.

Jeu du chomp : Exemple de partie



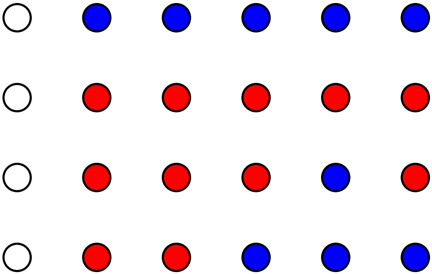
Bleu=enlevé par le joueur 1.
Rouge=enlevé par le joueur 2.

Jeu du chomp : Exemple de partie



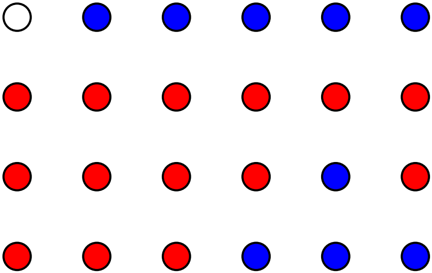
Bleu=enlevé par le joueur 1.
Rouge=enlevé par le joueur 2.

Jeu du chomp : Exemple de partie



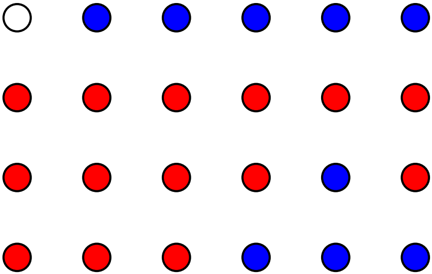
Bleu=enlevé par le joueur 1.
Rouge=enlevé par le joueur 2.

Jeu du chomp : Exemple de partie



Bleu=enlevé par le joueur 1.
Rouge=enlevé par le joueur 2.

Jeu du chomp : Exemple de partie



Bleu=enlevé par le joueur 1.
Rouge=enlevé par le joueur 2.

Le joueur 2 a gagné cette partie.

Stratégie gagnante ?

Le jeu est à stratégie gagnante car

$$h(e) = \text{ nombre de billes restantes dans l'état } e$$

décroit strictement à chaque coup.

Stratégie gagnante ?

Le jeu est à stratégie gagnante car

$$h(e) = \text{ nombre de billes restantes dans l'état } e$$

décroit strictement à chaque coup.

En fonction de a et b, qui gagne ?

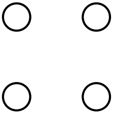
Petits cas : $b = 1$ et $(a, b) = (2, 2)$

Petits cas : $b = 1$ et $(a, b) = (2, 2)$

Le premier joueur gagne.

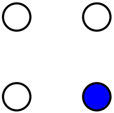
Petits cas : $b = 1$ et $(a, b) = (2, 2)$

Le premier joueur gagne.



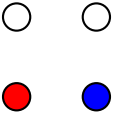
Petits cas : $b = 1$ et $(a, b) = (2, 2)$

Le premier joueur gagne.



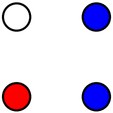
Petits cas : $b = 1$ et $(a, b) = (2, 2)$

Le premier joueur gagne.



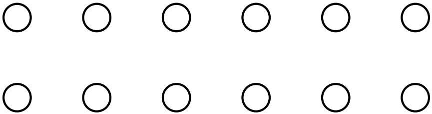
Petits cas : $b = 1$ et $(a, b) = (2, 2)$

Le premier joueur gagne.

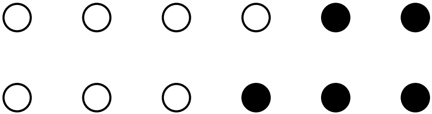


Le premier joueur gagne.

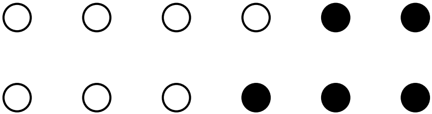
Le cas où $b = 2$



Le cas où $b = 2$

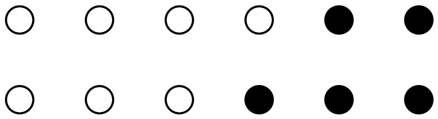


Le cas où $b = 2$



Le premier joueur peut toujours gagner s'il joue "bien".

Le cas où $b = 2$



Le premier joueur peut toujours gagner s'il joue "bien".

Lorsque $(a, b) \neq (1, 1)$ le premier joueur gagne-t-il ?

Vol de stratégie

On sait que pour $(a, b) \neq (1, 1)$ donné :

- soit il existe une stratégie du premier joueur qui le fait gagner ;
- soit il existe une stratégie du second joueur qui le fait gagner.

Vol de stratégie

On sait que pour $(a, b) \neq (1, 1)$ donné :

- soit il existe une stratégie du premier joueur qui le fait gagner ;
- soit il existe une stratégie du second joueur qui le fait gagner.

Raisonnement par l'absurde : le second joueur a une stratégie gagnante s.

Le premier joueur enlève 1 carré, le second peut appliquer s.

Vol de stratégie

On sait que pour $(a, b) \neq (1, 1)$ donné :

- soit il existe une stratégie du premier joueur qui le fait gagner ;
- soit il existe une stratégie du second joueur qui le fait gagner.

Raisonnement par l'absurde : le second joueur a une stratégie gagnante s.

Le premier joueur enlève 1 carré, le second peut appliquer s.
Le premier joueur pouvait lui aussi appliquer s directement et gagner.
Absurde !

Vol de stratégie

On sait que pour $(a, b) \neq (1, 1)$ donné :

- soit il existe une stratégie du premier joueur qui le fait gagner ;
- soit il existe une stratégie du second joueur qui le fait gagner.

Raisonnement par l'absurde : le second joueur a une stratégie gagnante s.

Le premier joueur enlève 1 carré, le second peut appliquer s.
Le premier joueur pouvait lui aussi appliquer s directement et gagner.
Absurde !
Conclusion : Il existe toujours une stratégie gagnante pour le premier joueur.

On parle de preuve par **vol de stratégie**.

Variante : cas d'égalité

On remplace les états finaux, perdants E_F par des états finaux perdants E_P et des états finaux de match nul E_N, avec $E_F = E_N \cup E_P$.

Théorème

Si toutes les parties terminent, alors il existe une stratégie pour gagner ou faire nul pour au moins un des deux joueurs.

Remarque

Cette stratégie peut exister pour les deux joueurs en même temps : toutes les parties sont alors nulles si les joueurs utilisent tous deux ces stratégies.

Exemple de jeu où les deux ont une stratégie pour gagner ou nul : le morpion.

Parfois il y a quand même un gagnant...

Jeu du “Puissance 4” sorti en 1974

Théorème (1988 J. Allen, V. Allis)

Même si les parties nulles sont possibles, sur un plateau 6×7 le premier joueur dispose d'une stratégie qui lui assure de gagner.

Remarque

L'existence d'une stratégie gagnante peut dépendre de la taille du plateau.

...et beaucoup de jeux qu'on ne sait pas résoudre (pour l'instant ?)

<u>Jeu de Hex :</u> est a stratégie gagnante, pour le premier joueur, par vol de stratégie. La stratégie gagnante est encore inconnue sur des grands plateaux de taille 9×9 ou plus.

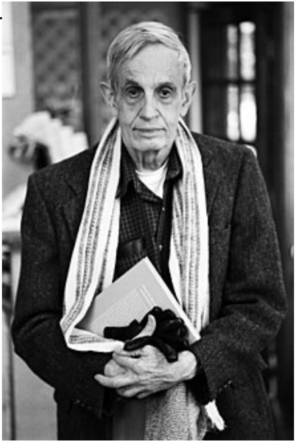
<u>Jeu de Go :</u> est à stratégie gagnante. Stratégie et joueur gagnant inconnus. Pour "trouver" ou "approcher" des stratégies gagnantes, certains ont tenté d'utiliser des nombres surréels (arithmétique), des méthodes de Monte-Carlo (probabilités), des réseaux de neurones et apprentissage profond (intelligence artificielle),... sans succès pour l'instant

<u>Jeu des Échecs :</u> On ne sait presque rien : le jeu est-il à stratégie gagnante ? Le premier joueur peut-il s'assurer du nul ? Le second joueur aussi ?

Outline

Théorie des Jeux : John Nash

<u>Premières formalisations :</u>
John Von Neumann, Oscar Morgenstern (1944
Puis John Nash (1951) – équilibre de Nash
thèse de doctorat de seulement 31 pages (!)



<u>Hypothèses :</u>
les joueur sont **rationnels** et ils poursuivent des objectifs **exogènes** et **indépendants**.
Ils tiennent compte de la connaissance qu'ils ont ou des anticipations qu'ils font du comportement des autres décideurs (ils raisonnent de manière stratégique).

<u>Applications en :</u>
économie, sciences politiques, sciences sociales, biologie, etc.

Le Dilemme du prisonnier

Principe :

- Deux prisonniers soupçonnés d'une faute.
- Interrogés séparément : ne savent pas ce que l'autre va dire.
- Chacun peut choisir :
  - de trahir l'autre,
  - ou de se taire.

Gains et pertes :

- Si les deux se taisent : peu de preuves, chacun fait 1 an de prison.
- Si les deux se trahissent : assez de preuves, chacun fait 5 ans de prison.
- S'il se tait et l'autre trahit, il fait 10 ans de prison.
- S'il trahit et l'autre se tait, il est libéré.

A vous de jouer !

Que feriez-vous ?

A vous de jouer !

Que feriez-vous ?

3

A vous de jouer !

Que feriez-vous ?

2

A vous de jouer !

Que feriez-vous ?

1

A vous de jouer !

Que feriez-vous ?

Résultats

A vous de jouer !

Que feriez-vous ?

On recommence

A vous de jouer !

Que feriez-vous ?

3

A vous de jouer !

Que feriez-vous ?

2

A vous de jouer !

Que feriez-vous ?

1

A vous de jouer !

Que feriez-vous ?

Résultats

Votre choix était-il raisonnable ?

\	se taire	trahir
se taire	$-1 \backslash -1$	$-10 \backslash 0$
trahir	$0 \backslash -10$	$-5 \backslash -5$

Équilibre de Nash

Définition

Un **équilibre de Nash** est la donnée d'une famille de stratégie $(s_1, \ldots, s_n)$ où s_i est la stratégie du joueur i, telle qu'aucun joueur n'a intérêt à changer de stratégie s'il connaît les stratégies des autres joueurs.

Dans le dilemme du prisonnier : 2 équilibres de Nash

- Tout le monde se tait.
- Tout le monde trahit.

Pierre-Feuille-Ciseaux : pas d'équilibre...

J2 \ J1	pierre	feuille	ciseaux
pierre	$0\backslash 0$	$-1\backslash 1$	$1\backslash -1$
feuille	$1\backslash -1$	$0\backslash 0$	$-1\backslash 1$
ciseaux	$-1\backslash 1$	$1\backslash -1$	$0\backslash 0$

Pierre-Feuille-Ciseaux : pas d'équilibre...vraiment ! ?

J2 \ J1	pierre	feuille	ciseaux
pierre	$0\backslash 0$	$-1\backslash 1$	$1\backslash -1$
feuille	$1\backslash -1$	$0\backslash 0$	$-1\backslash 1$
ciseaux	$-1\backslash 1$	$1\backslash -1$	$0\backslash 0$

Pierre-Feuille-Ciseaux : pas d'équilibre...vraiment ! ?

	J2 \ J1	a pierre	b feuille	c ciseaux
x	pierre	$0\backslash 0$	$-1\backslash 1$	$1\backslash -1$
y	feuille	$1\backslash -1$	$0\backslash 0$	$-1\backslash 1$
z	ciseaux	$-1\backslash 1$	$1\backslash -1$	$0\backslash 0$

Pierre-Feuille-Ciseaux : pas d'équilibre...vraiment ! ?

	J2 \ J1	a pierre	b feuille	c ciseaux
x	pierre	$0\backslash 0$	$-1\backslash 1$	$1\backslash -1$
y	feuille	$1\backslash -1$	$0\backslash 0$	$-1\backslash 1$
z	ciseaux	$-1\backslash 1$	$1\backslash -1$	$0\backslash 0$

Contraintes $x, y, z, a, b, c \geqslant 0$ et $x + y + z = a + b + c = 1$

Pierre-Feuille-Ciseaux : pas d'équilibre...vraiment ! ?

	J2 \ J1	a pierre	b feuille	c ciseaux
x	pierre	$0\backslash 0$	$-1\backslash 1$	$1\backslash -1$
y	feuille	$1\backslash -1$	$0\backslash 0$	$-1\backslash 1$
z	ciseaux	$-1\backslash 1$	$1\backslash -1$	$0\backslash 0$

Contraintes $x, y, z, a, b, c \geqslant 0$ et $x + y + z = a + b + c = 1$
Gain de J2 : $xc + ya + zb$
Maximal avec $(x, y, z) = (c, a, b)$

Pierre-Feuille-Ciseaux : pas d'équilibre...vraiment ! ?

	J2 \ J1	a pierre	b feuille	c ciseaux
x	pierre	$1\backslash 1$	$-1\backslash 1$	$1\backslash -1$
y	feuille	$1\backslash -1$	$1\backslash 1$	$-1\backslash 1$
z	ciseaux	$-1\backslash 1$	$1\backslash -1$	$1\backslash 1$

Contraintes $x, y, z, a, b, c \geqslant 0$ et $x + y + z = a + b + c = 1$
Gain de J2 : $x(c + a) + y(a + b) + z(b + c)$
Maximal avec $(x, y, z) = (\frac{c+a}{2}, \frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2})$

Pierre-Feuille-Ciseaux : pas d'équilibre...vraiment ! ?

	J2 \ J1	a pierre	b feuille	c ciseaux
x	pierre	$1\backslash 1$	$-1\backslash 1$	$1\backslash -1$
y	feuille	$1\backslash -1$	$1\backslash 1$	$-1\backslash 1$
z	ciseaux	$-1\backslash 1$	$1\backslash -1$	$1\backslash 1$

Contraintes $x, y, z, a, b, c \geqslant 0$ et $x + y + z = a + b + c = 1$
Maximal avec $(x, y, z) = (\frac{c+a}{2}, \frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2})$
Équilibre de Nash : $(a, b, c) = (x, y, z) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.