Comment peut-on faire les opérations usuelles quand on a juste une règle graduée et des crayons?

Benoit Loisel

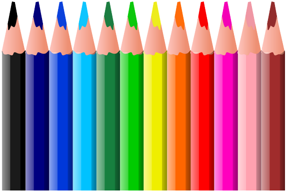
ENS de Lyon

Mardi 14 avril 2020

Outline

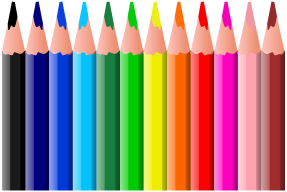
Le matériel

Des crayons de couleur



Le matériel

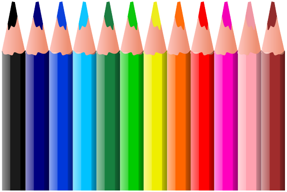
Des crayons de couleur



Une règle graduée

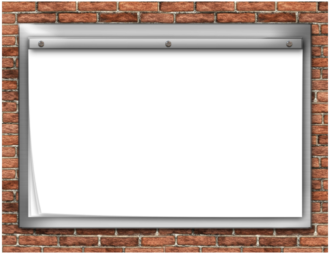
Le matériel

Des crayons de couleur



Une règle graduée

Une feuille de papier orientée dans le sens paysage



Illusions d'optique ?

Illusions d'optique ?

Qui est le plus grand ?

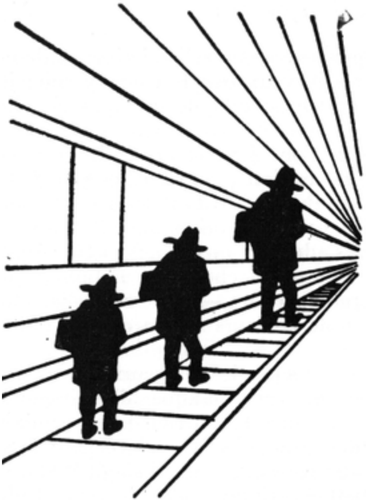
Illusions d'optique ?

Illusions d'optique ?

Ils font exactement la même taille.

Si, si, mesurez !

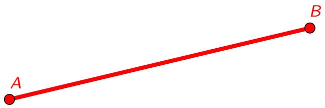
Illusions d'optique ?



Que peut-on faire avec ?

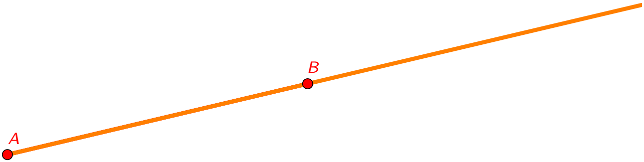
Que peut-on faire avec ?

- Tracer un segment de droite ;



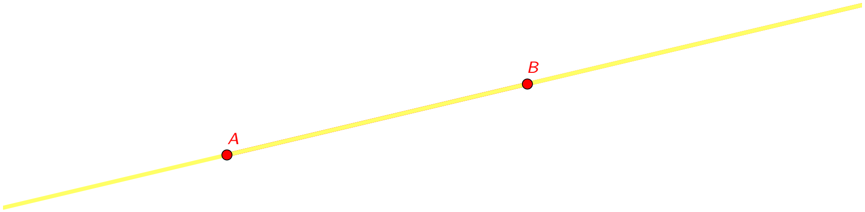
Que peut-on faire avec ?

- Tracer un segment de droite ;
- Prolonger un segment de droite ;



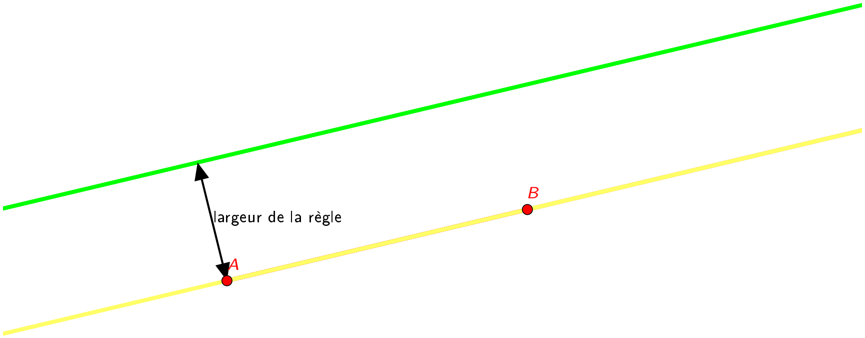
Que peut-on faire avec ?

- Tracer une droite ;



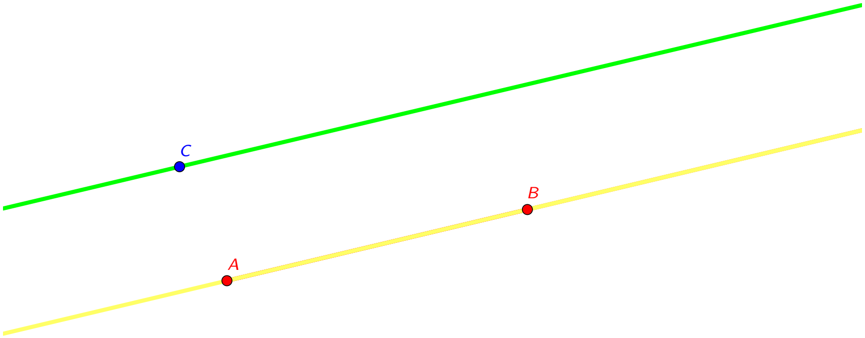
Que peut-on faire avec ?

- Tracer une droite ;
- Tracer deux deux droites parallèles d'écartement donné ;



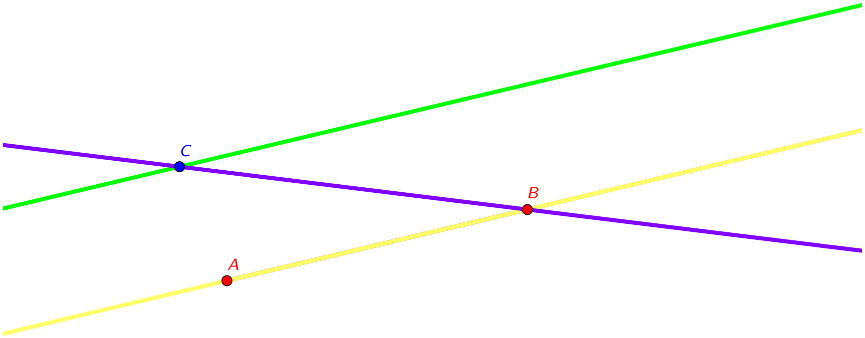
Que peut-on faire avec ?

- Tracer une droite ;
- Tracer deux deux droites parallèles d'écartement donné ;
- Tracer une droite passant par 2 points donnés.



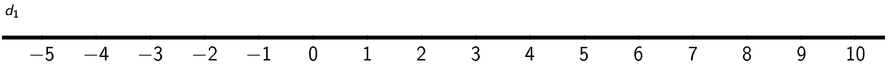
Que peut-on faire avec ?

- Tracer une droite ;
- Tracer deux deux droites parallèles d'écartement donné ;
- Tracer une droite passant par 2 points donnés.

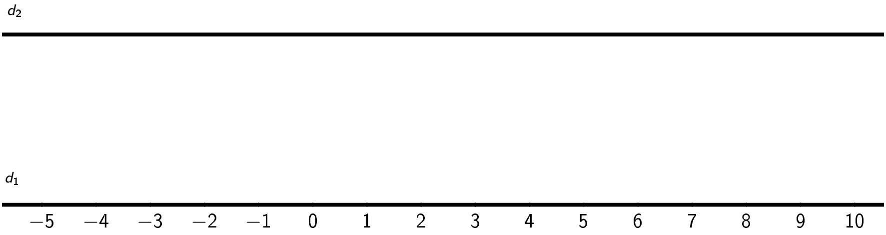


Addition avec une règle graduée et des crayons de couleur

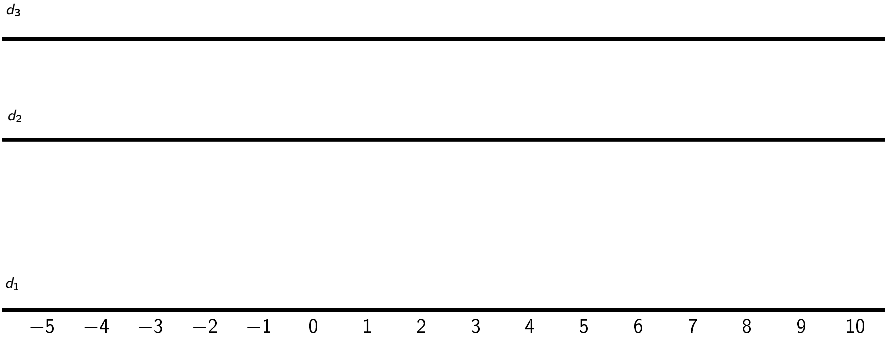
Addition avec une règle graduée et des crayons de couleur



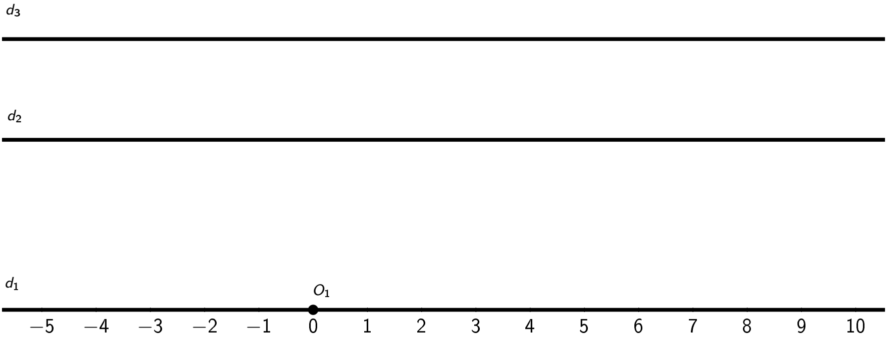
Addition avec une règle graduée et des crayons de couleur



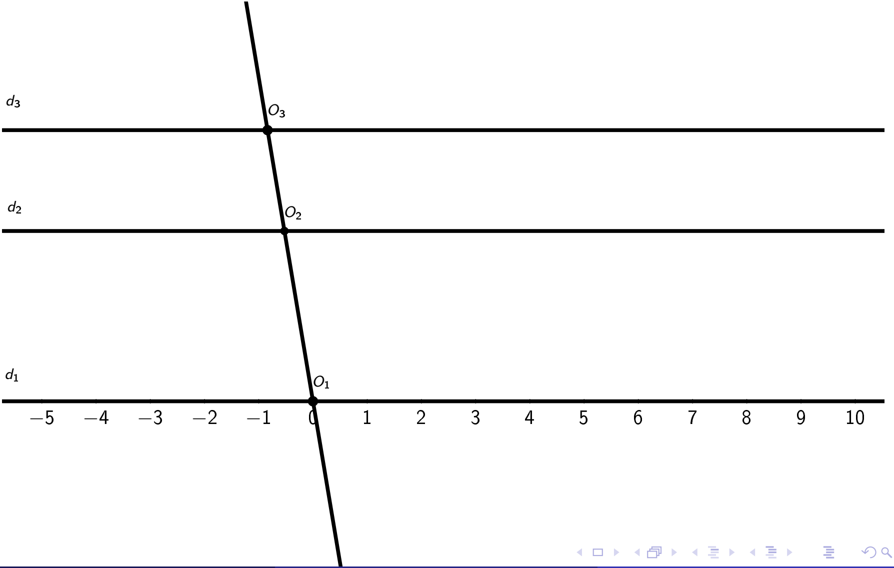
Addition avec une règle graduée et des crayons de couleur



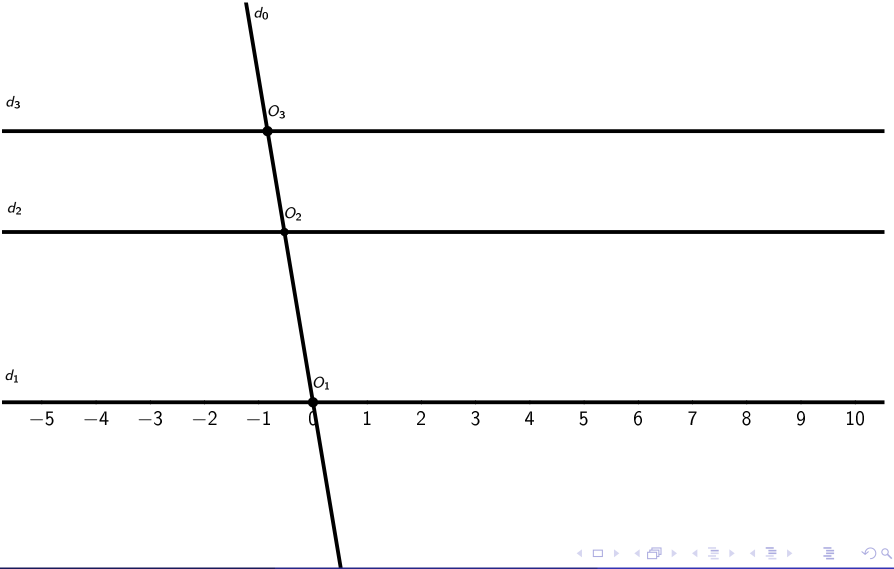
Addition avec une règle graduée et des crayons de couleur



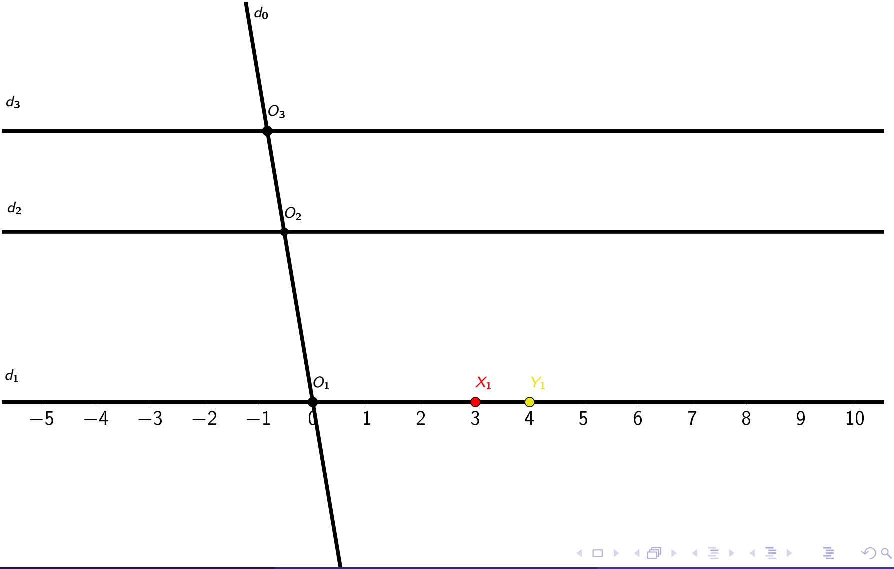
Addition avec une règle graduée et des crayons de couleur



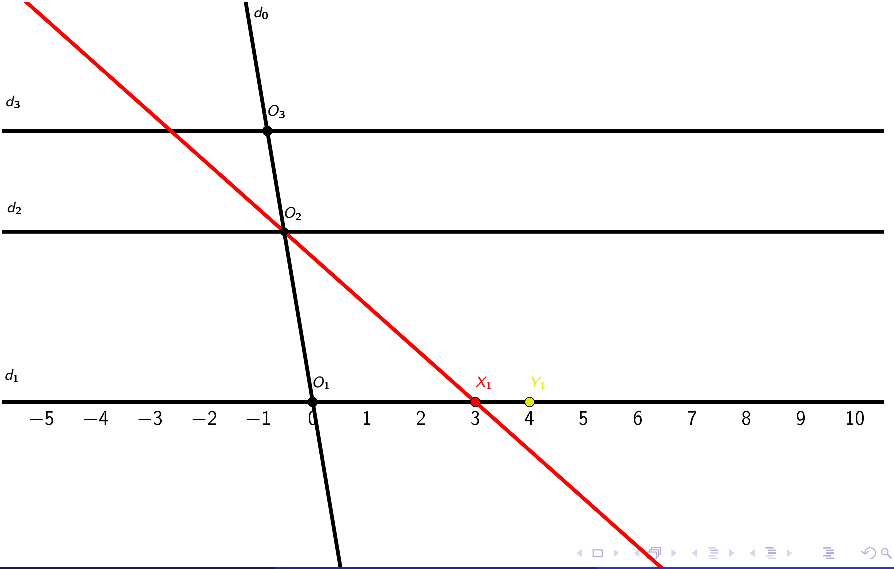
Addition avec une règle graduée et des crayons de couleur



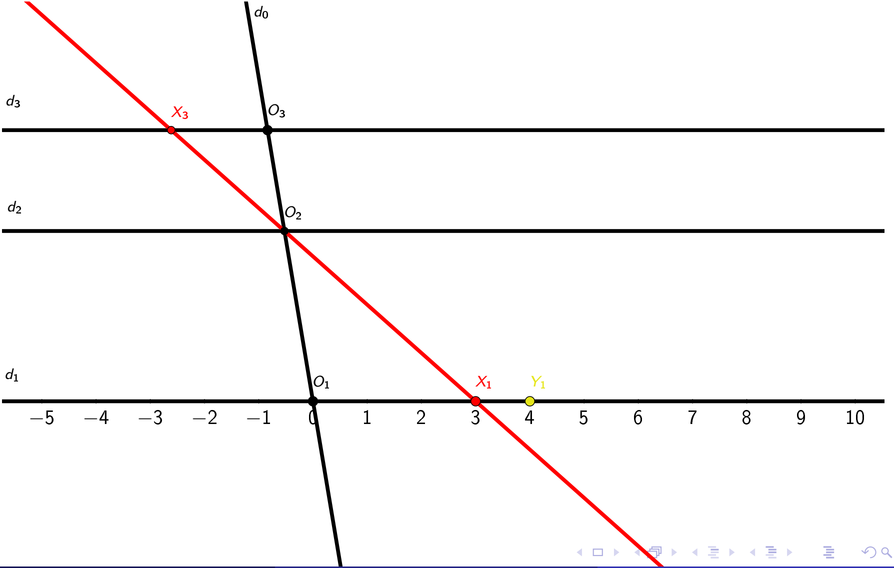
Addition avec une règle graduée et des crayons de couleur



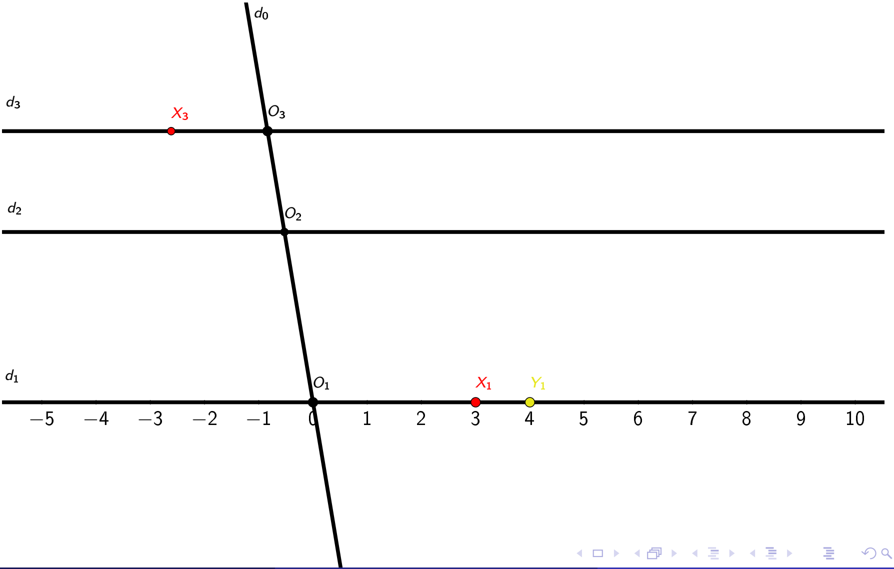
Addition avec une règle graduée et des crayons de couleur



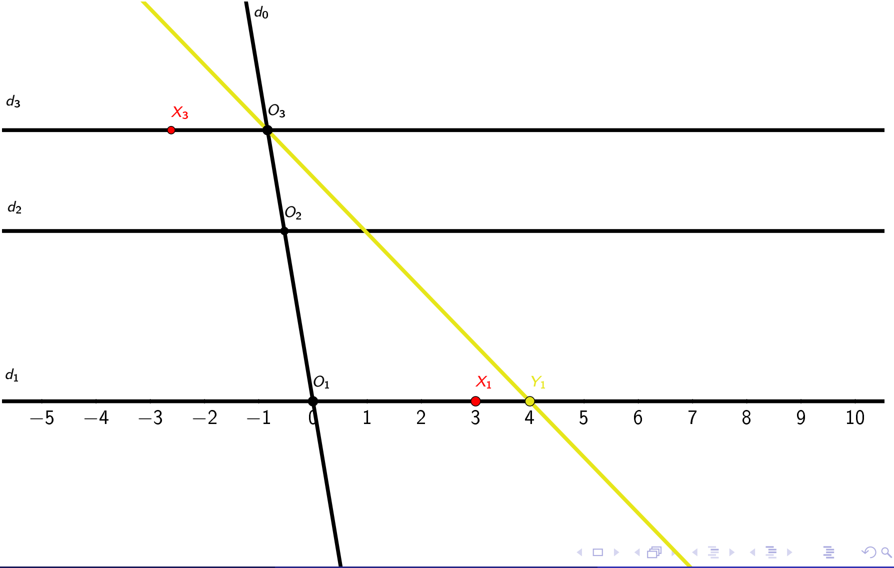
Addition avec une règle graduée et des crayons de couleur



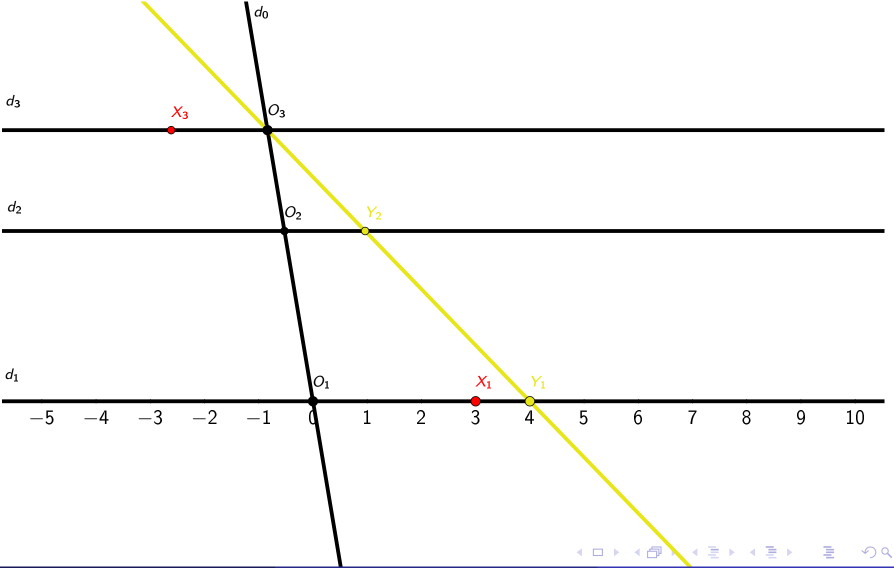
Addition avec une règle graduée et des crayons de couleur



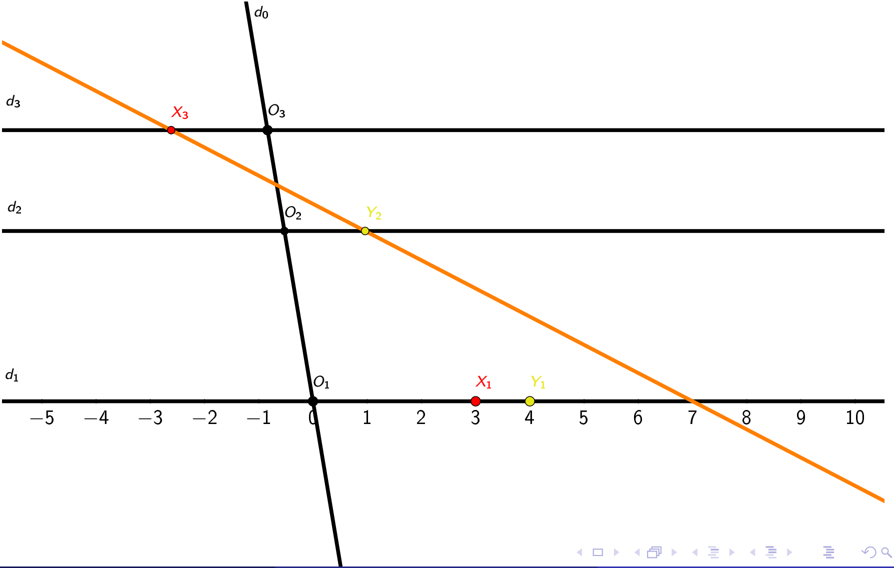
Addition avec une règle graduée et des crayons de couleur



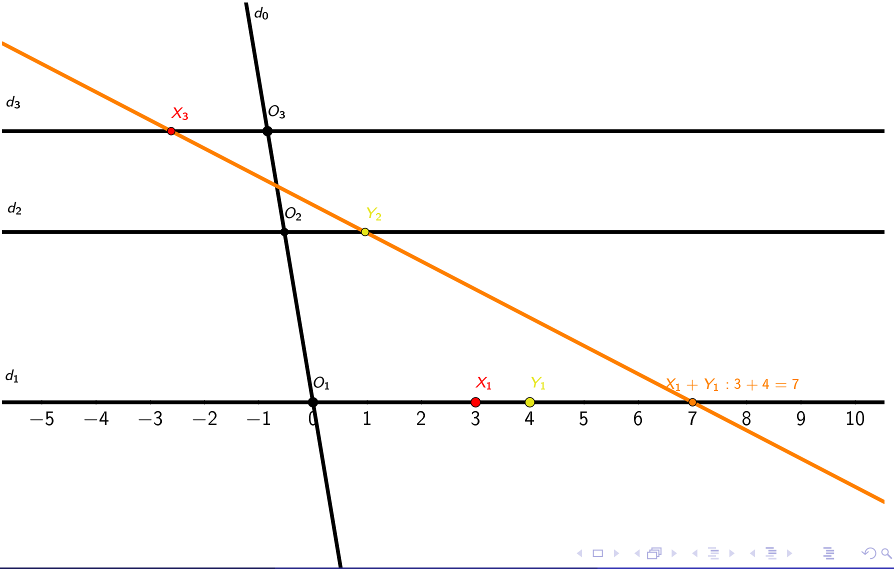
Addition avec une règle graduée et des crayons de couleur



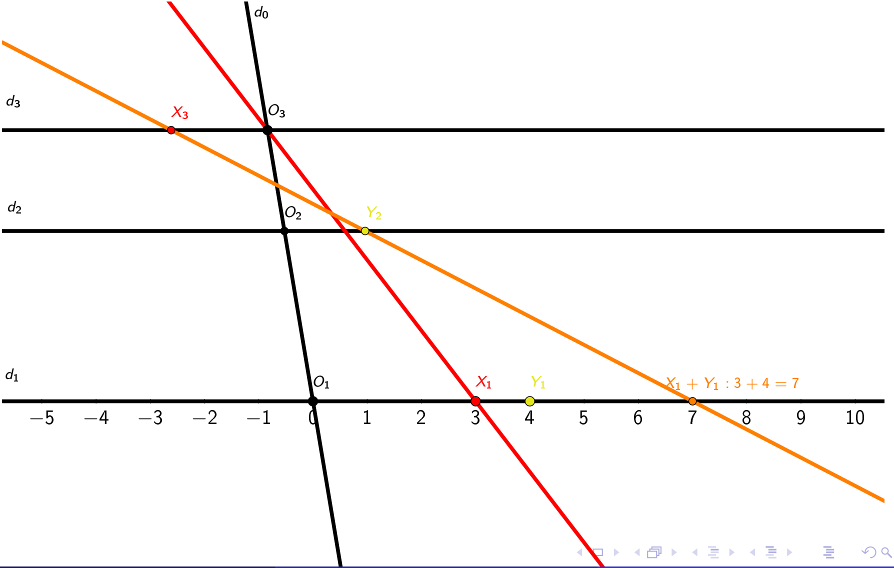
Addition avec une règle graduée et des crayons de couleur



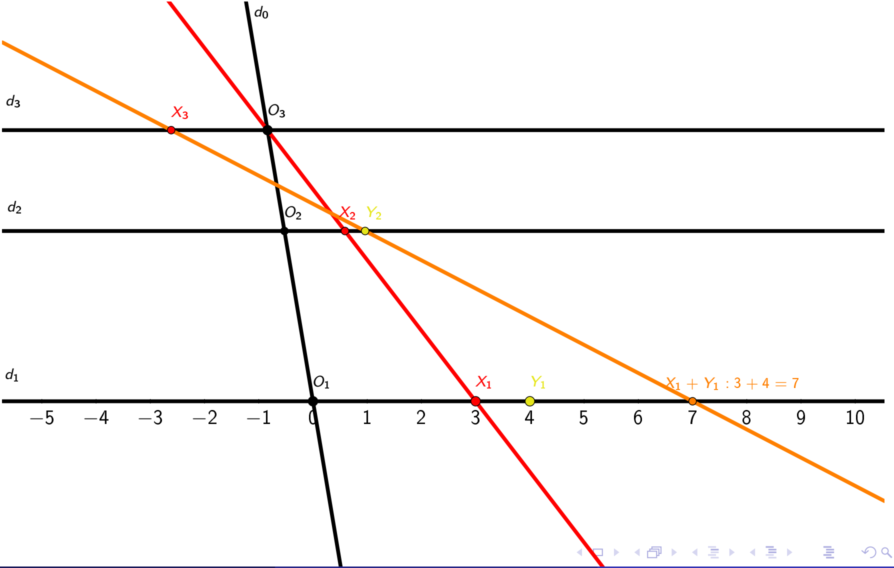
Addition avec une règle graduée et des crayons de couleur



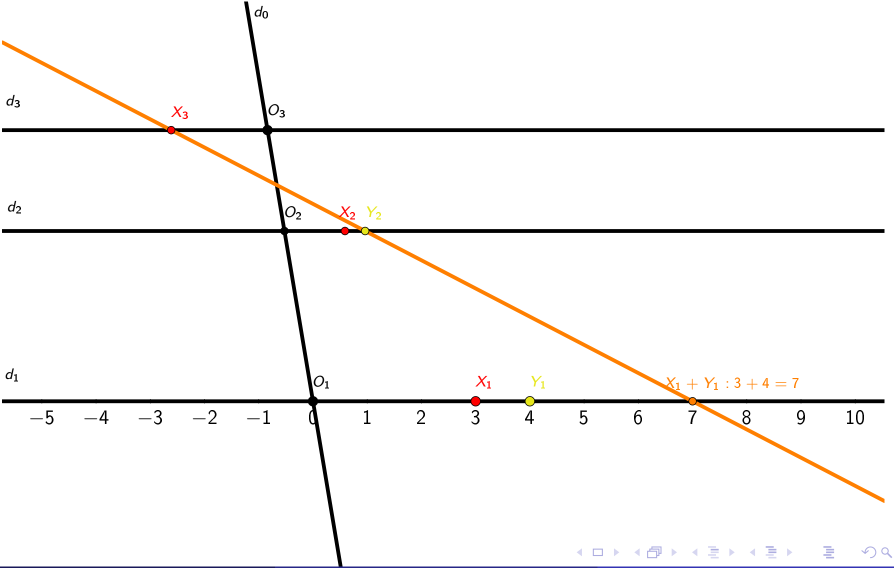
Et dans l'autre sens ?



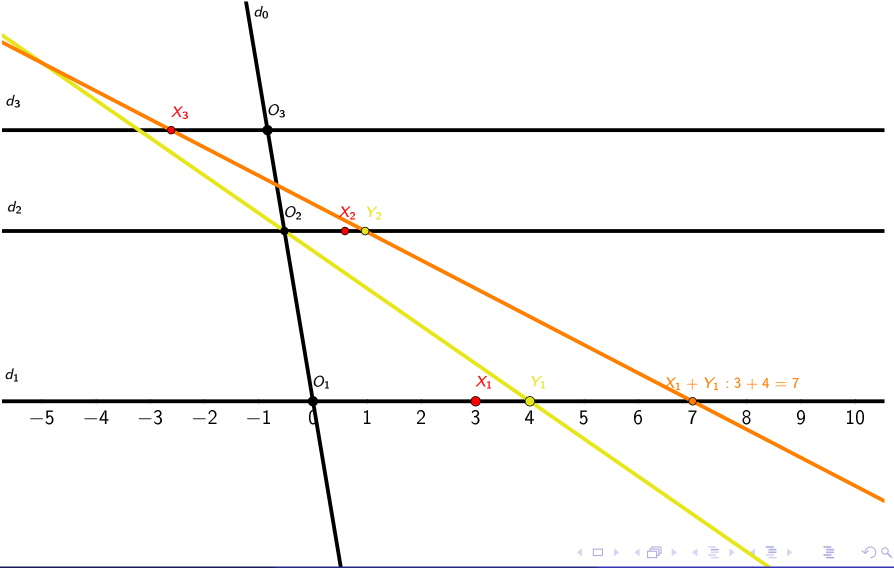
Et dans l'autre sens ?



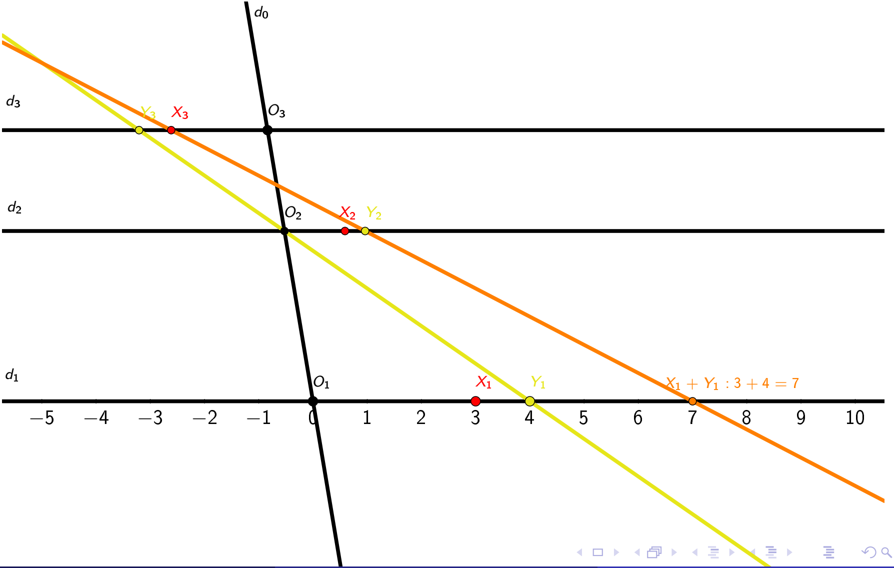
Et dans l'autre sens ?



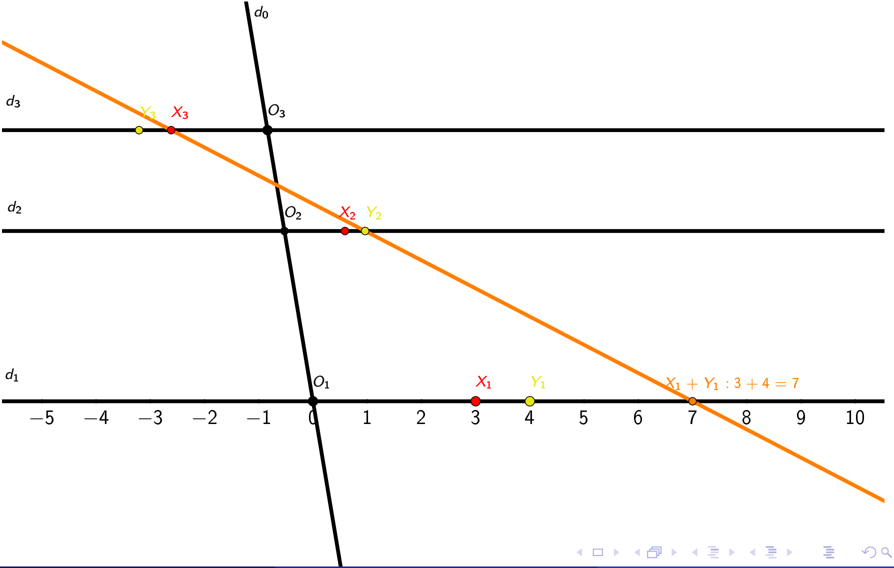
Et dans l'autre sens ?



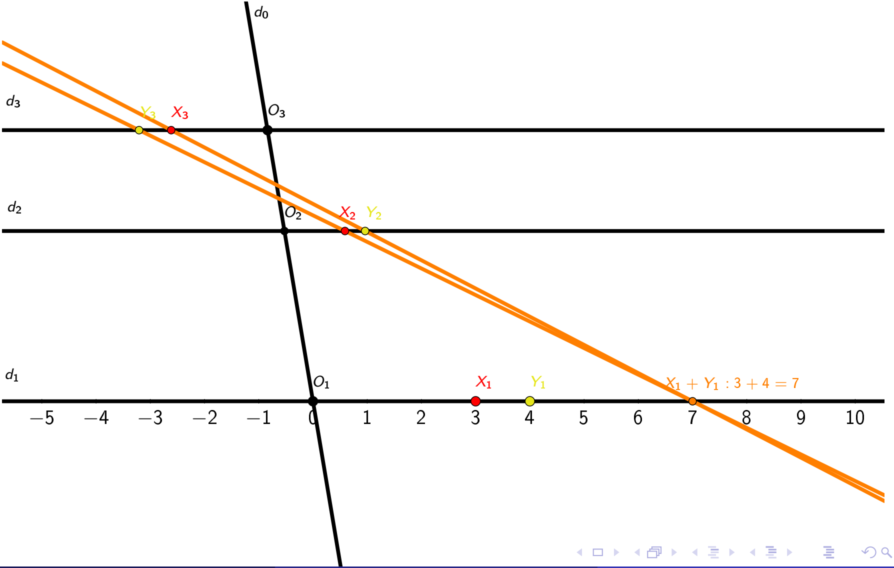
Et dans l'autre sens ?



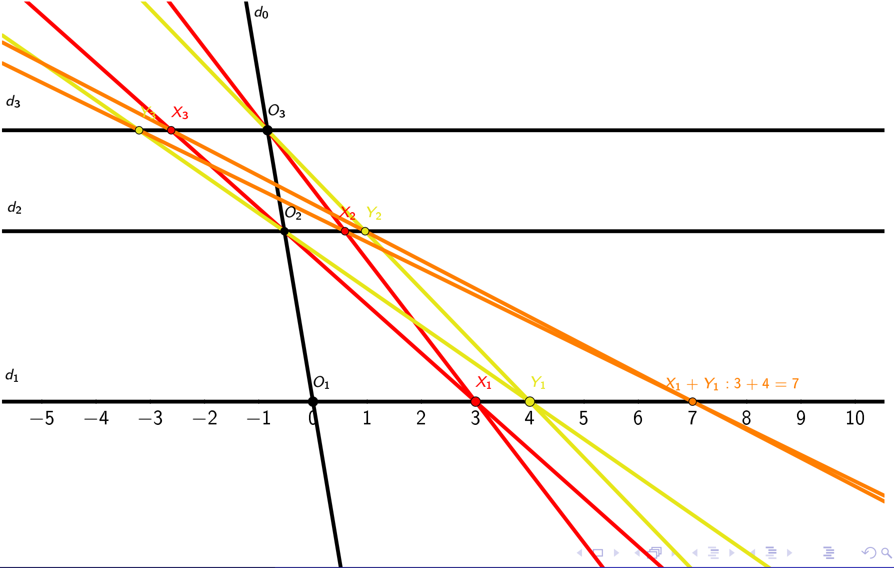
Et dans l'autre sens ?



Et dans l'autre sens ?



L'addition c'est commutatif !



C'est quoi une soustraction ?

C'est quoi une soustraction ?

On sait bien que

C'est quoi une soustraction ?

On sait bien que

$$4 - 3 = 1$$

C'est quoi une soustraction ?

On sait bien que

$$y - x = z$$

C'est quoi une soustraction ?

On sait bien que

$$y - x = z$$

avec $x = 3$ et $y = 4$ et $z = 1$.

C'est quoi une soustraction ?

On sait bien que

$$y - x = z$$

avec $x = 3$ et $y = 4$ et $z = 1$.

Question : Comment trouver z à partir de x et y en général ?

C'est quoi une soustraction ?

On sait bien que

$$y - x = z$$

avec $x = 3$ et $y = 4$ et $z = 1$.

Question : Comment trouver z à partir de x et y en général ?

$$y - x = \qquad z$$

C'est quoi une soustraction ?

On sait bien que

$$y - x = z$$

avec $x = 3$ et $y = 4$ et $z = 1$.

Question : Comment trouver z à partir de x et y en général ?

$$y - x = \qquad z$$

On ajoute x de part et d'autre !

C'est quoi une soustraction ?

On sait bien que

$$y - x = z$$

avec $x = 3$ et $y = 4$ et $z = 1$.

Question : Comment trouver z à partir de x et y en général ?

$$y \qquad = x + z$$

C'est quoi une soustraction ?

On sait bien que

$$y - x = z$$

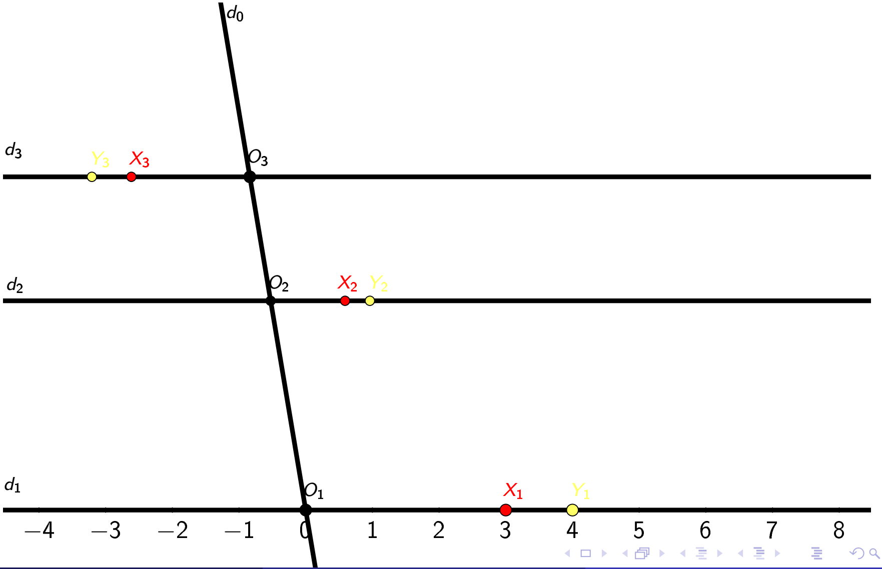
avec $x = 3$ et $y = 4$ et $z = 1$.

Question : Comment trouver z à partir de x et y en général ?

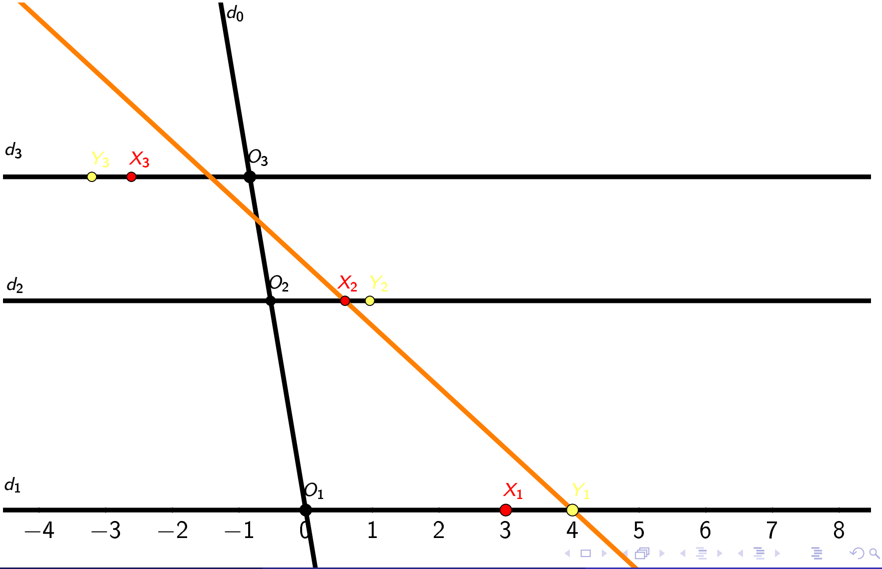
$$y \qquad = x + z$$

On cherche z tel que $y = x + z$.

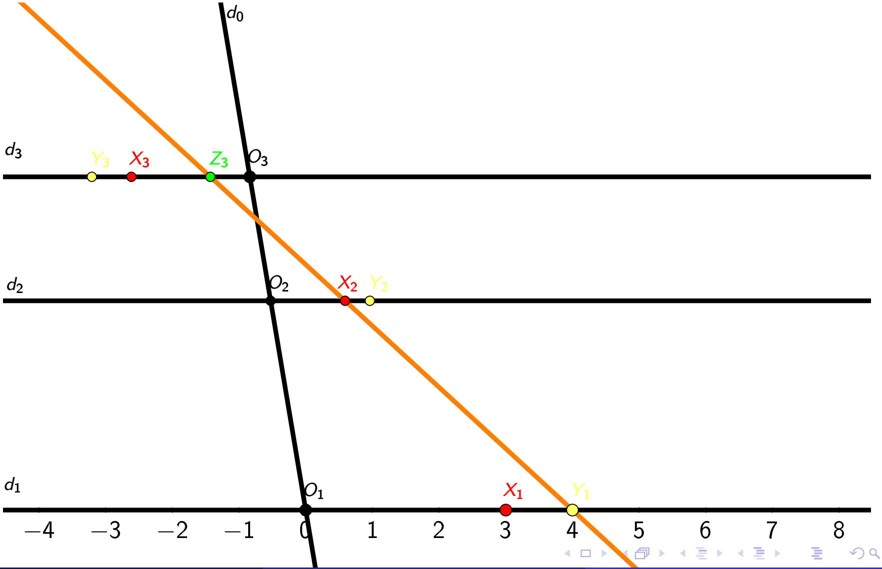
Construction de la soustraction



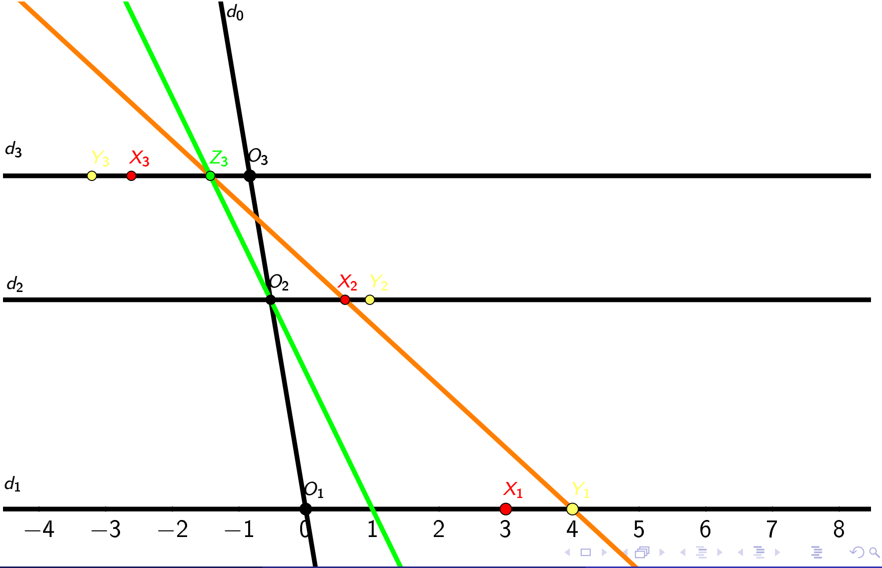
Construction de la soustraction



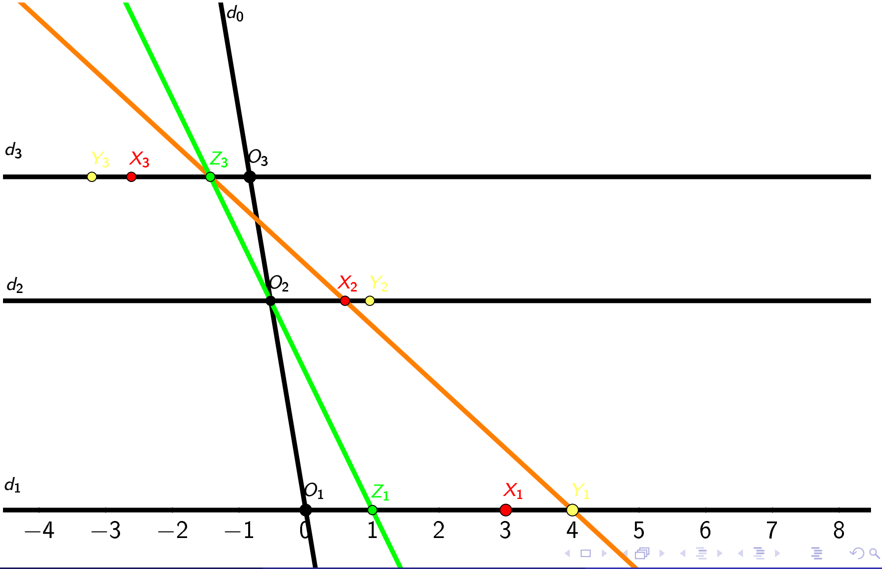
Construction de la soustraction



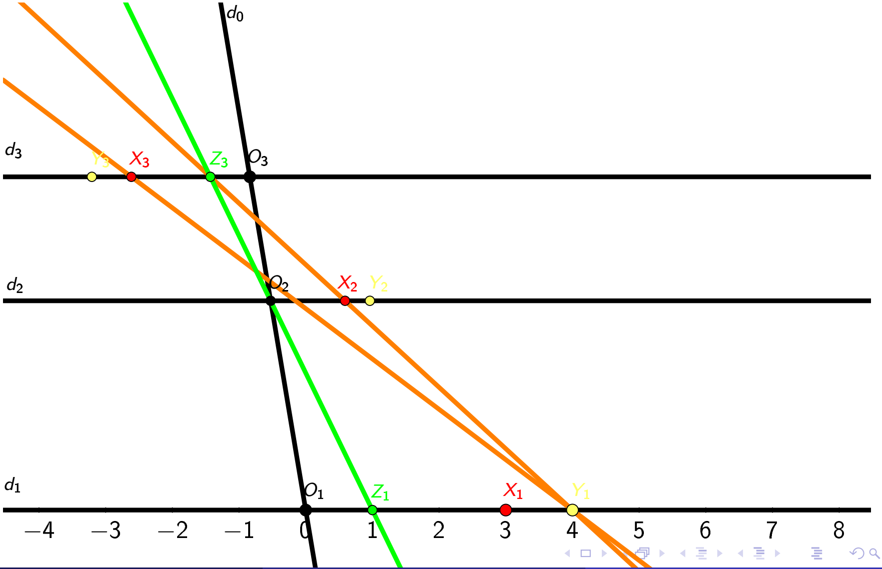
Construction de la soustraction



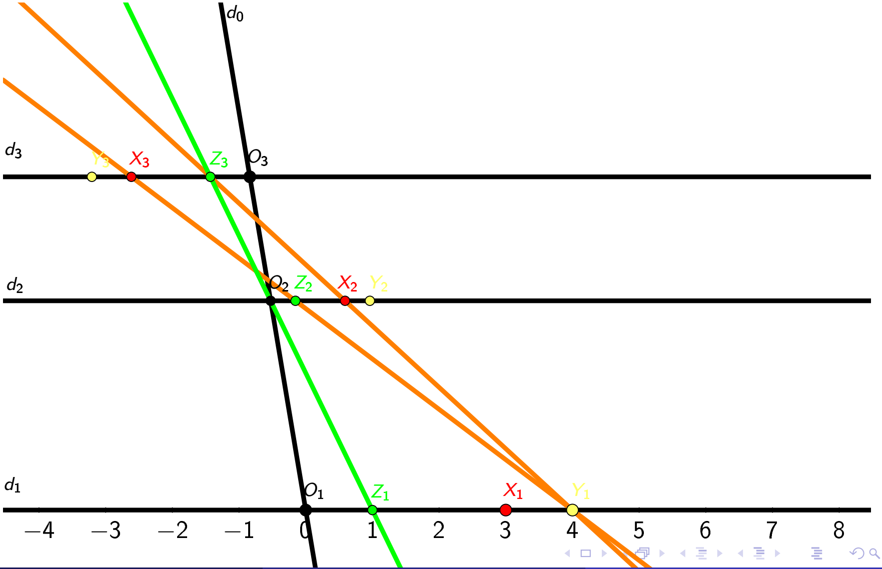
Construction de la soustraction



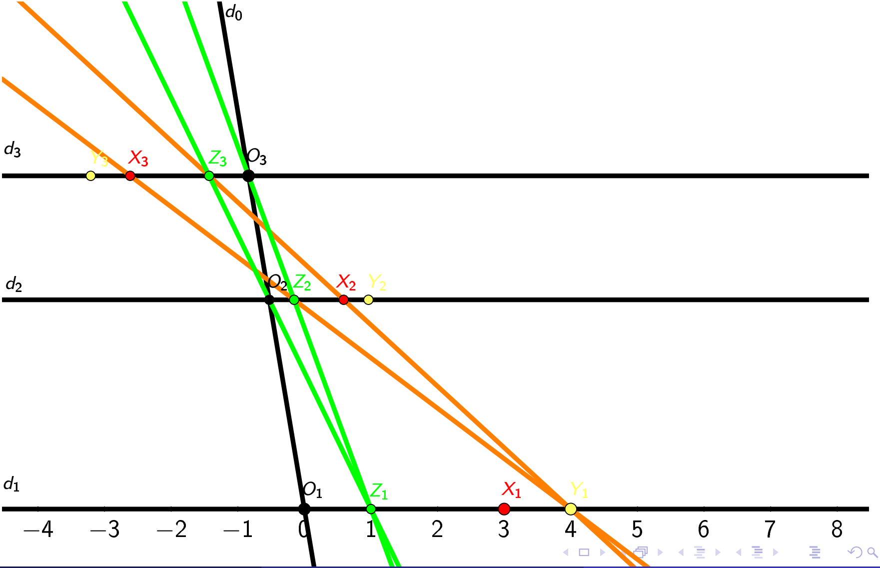
Construction de la soustraction



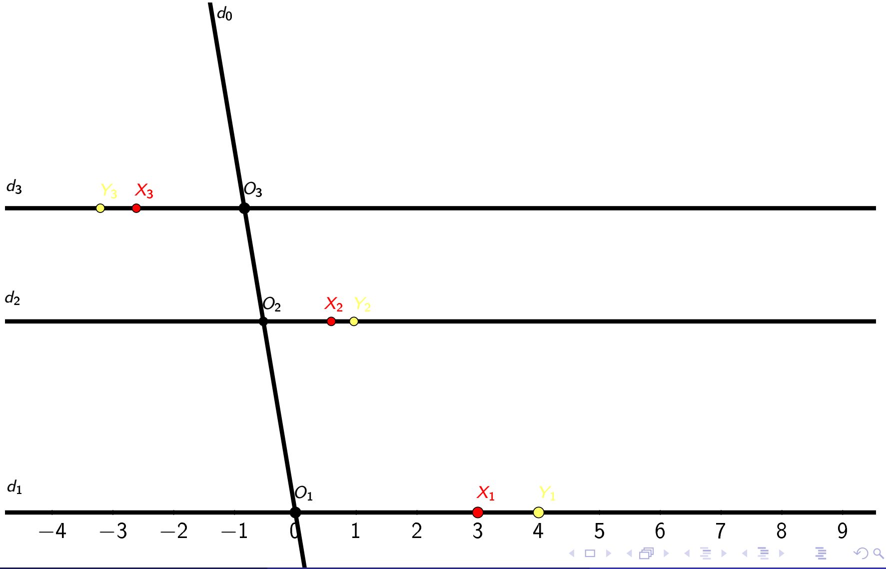
Construction de la soustraction



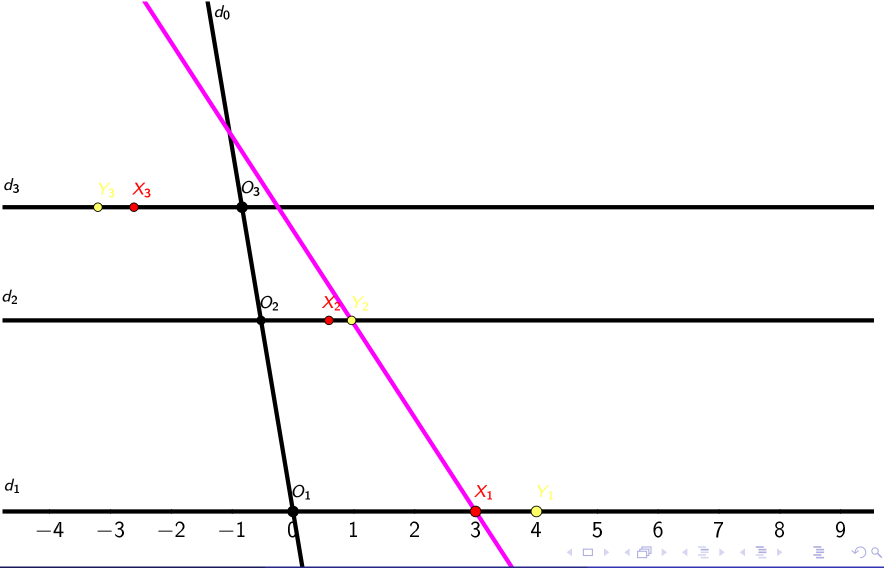
Construction de la soustraction



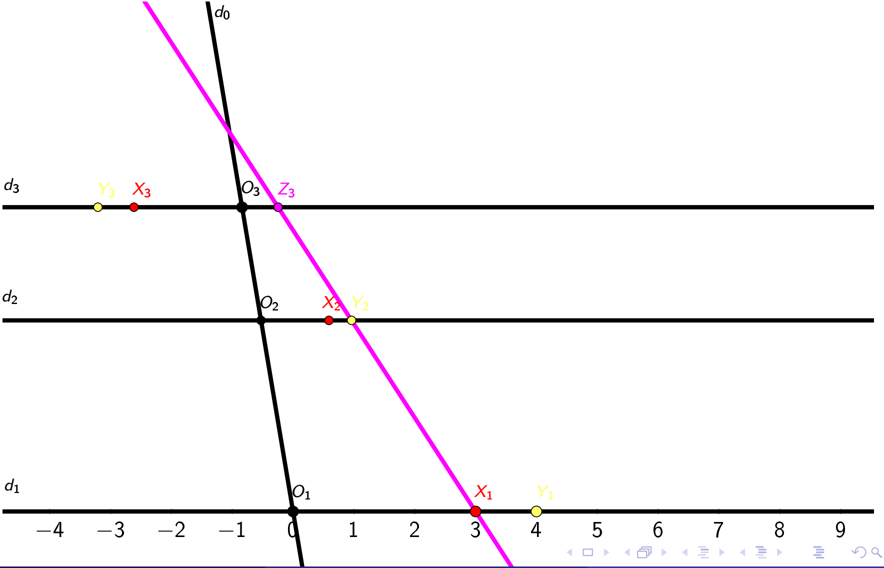
La soustraction n'est pas commutative



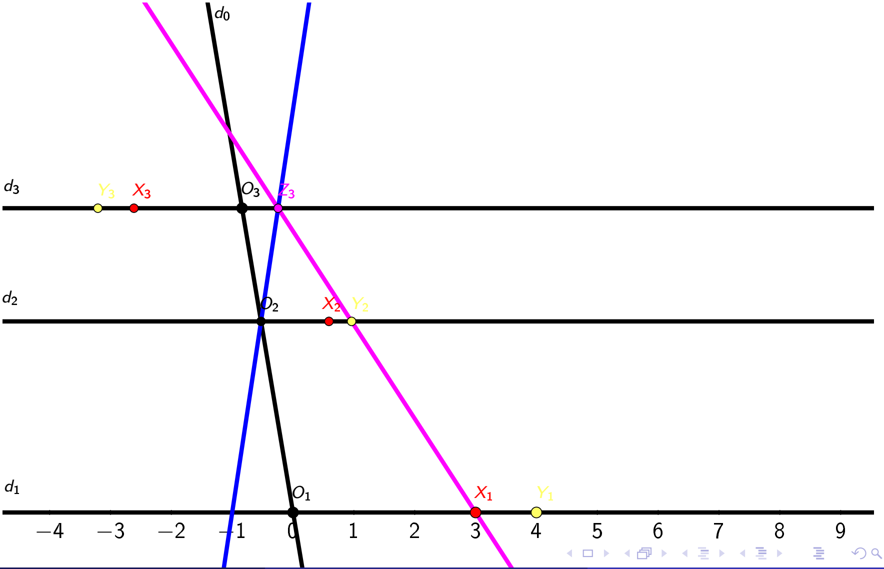
La soustraction n'est pas commutative



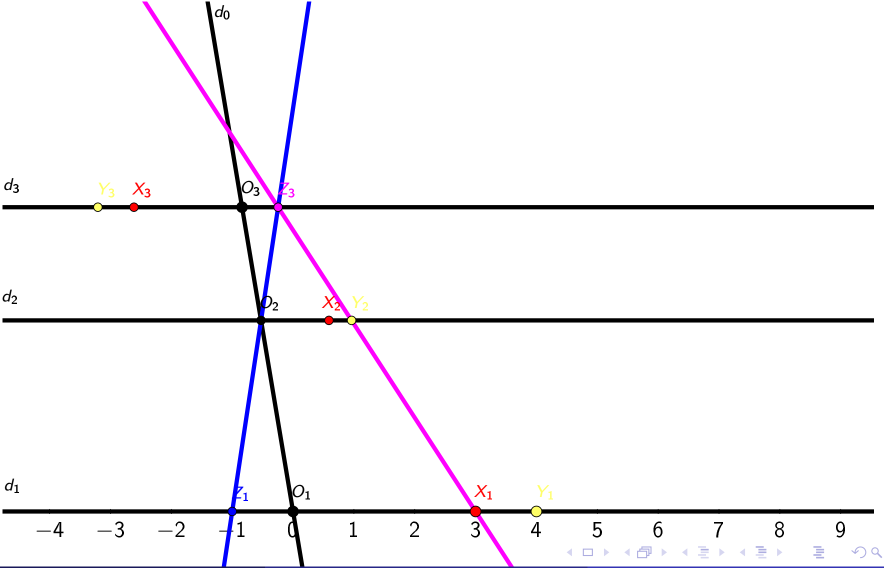
La soustraction n'est pas commutative



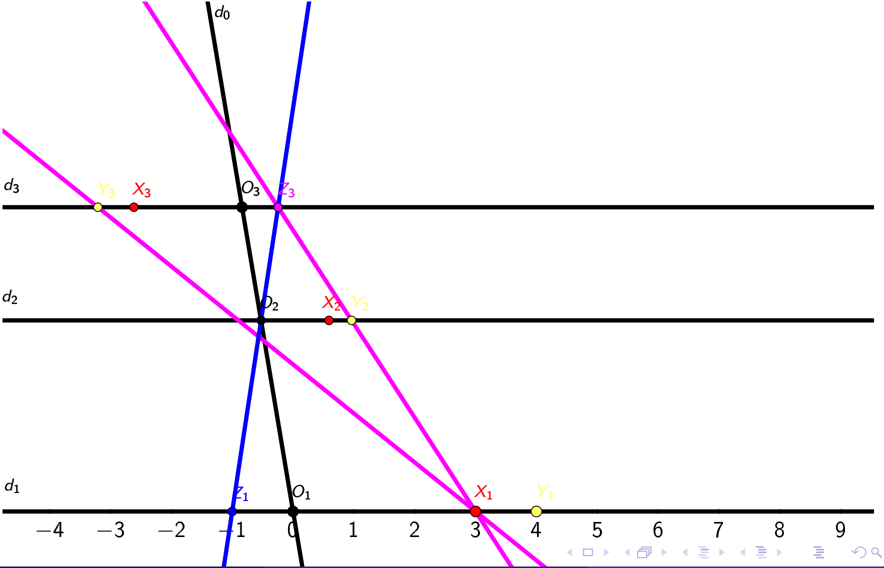
La soustraction n'est pas commutative



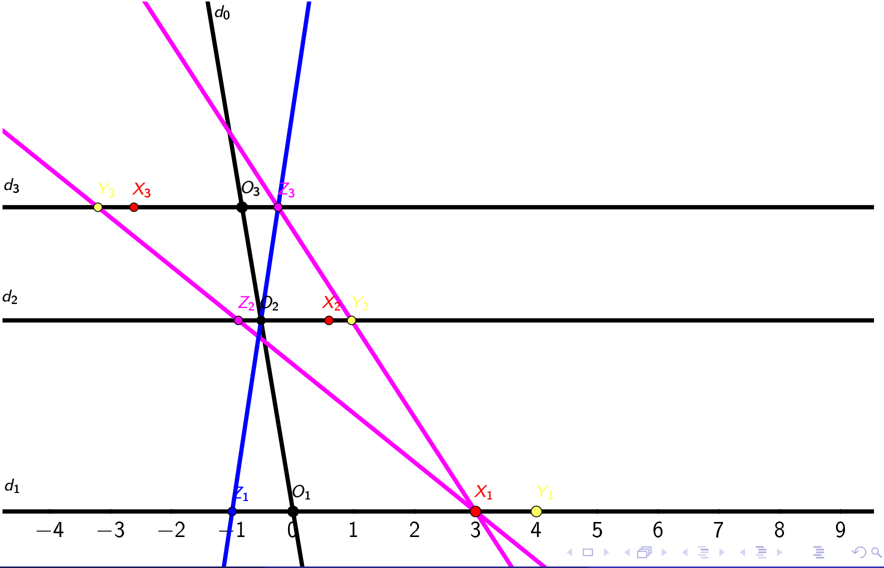
La soustraction n'est pas commutative : $3 - 4 = -1$



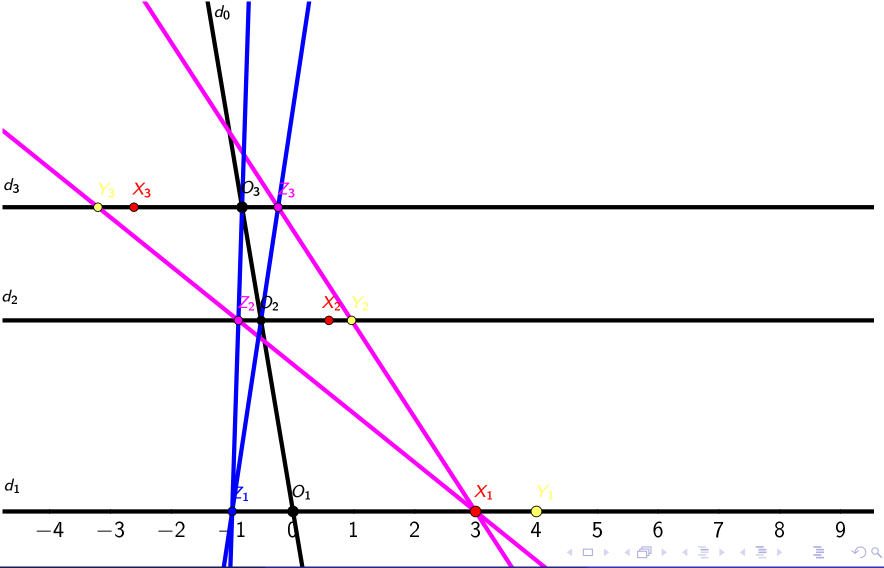
La soustraction n'est pas commutative : $3 - 4 = -1$



La soustraction n'est pas commutative : $3 - 4 = -1$



La soustraction n'est pas commutative : $3 - 4 = -1$



Un élément « neutre »

Un élément « neutre »

Pour une addition :

Un élément « neutre »

Pour une addition :

$$x + 0 = x = 0 + x$$

Un élément « neutre »

Pour une addition :

$$x + 0 = x = 0 + x$$

On a utilisé les « zéros » :

Un élément « neutre »

Pour une addition :

$$x + 0 = x = 0 + x$$

On a utilisé les « zéros » : O_2 et O_3 sur les droites d_2 et d_3.

Un élément « neutre »

Pour une addition :

$$x + 0 = x = 0 + x$$

On a utilisé les « zéros » : O_2 et O_3 sur les droites d_2 et d_3.

Pour une multiplication :

Un élément « neutre »

Pour une addition :

$$x + 0 = x = 0 + x$$

On a utilisé les « zéros » : O_2 et O_3 sur les droites d_2 et d_3.

Pour une multiplication :

$$x \times 1 = x = 1 \times x$$

Un élément « neutre »

Pour une addition :

$$x + 0 = x = 0 + x$$

On a utilisé les « zéros » : O_2 et O_3 sur les droites d_2 et d_3.

Pour une multiplication :

$$x \times 1 = x = 1 \times x$$

Plutôt que les zéros, on va utiliser les 1 :

Un élément « neutre »

Pour une addition :

$$x + 0 = x = 0 + x$$

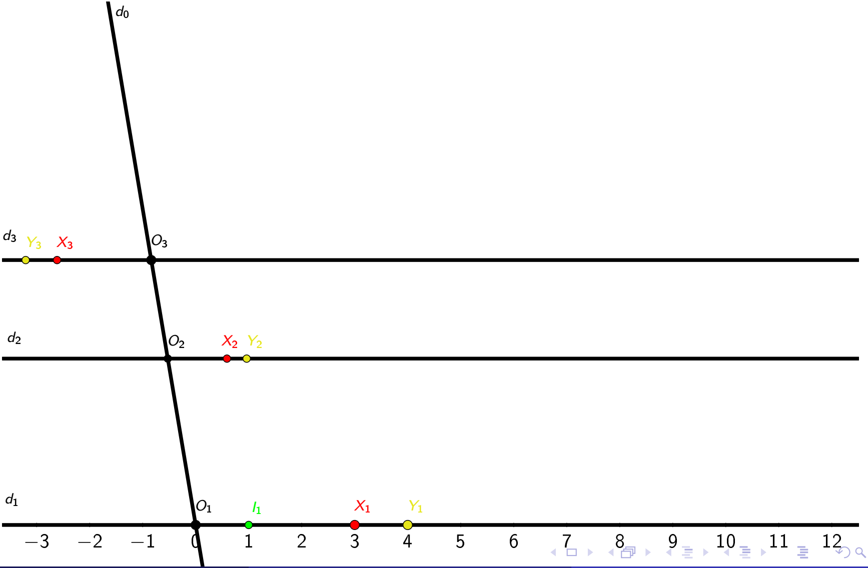
On a utilisé les « zéros » : O_2 et O_3 sur les droites d_2 et d_3.

Pour une multiplication :

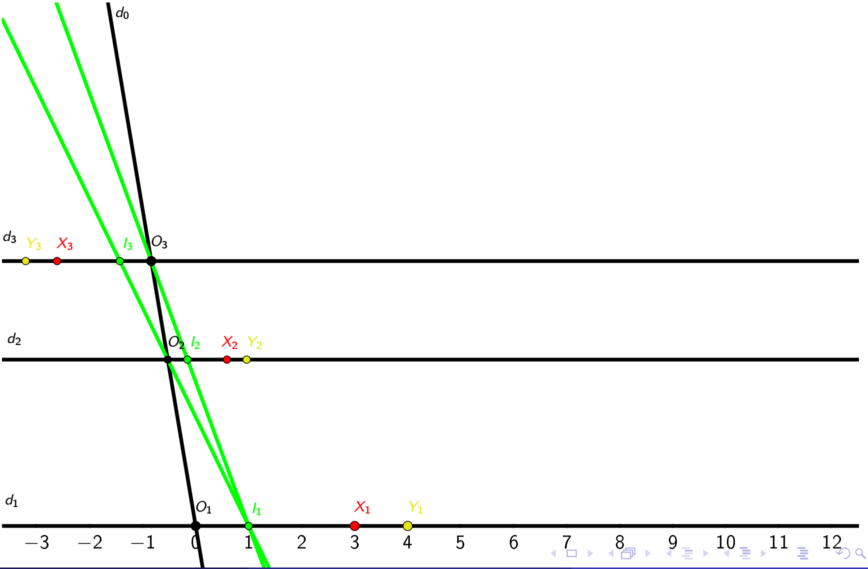
$$x \times 1 = x = 1 \times x$$

Plutôt que les zéros, on va utiliser les 1 : I_2 et I_3 sur les droites d_2 et d_3.

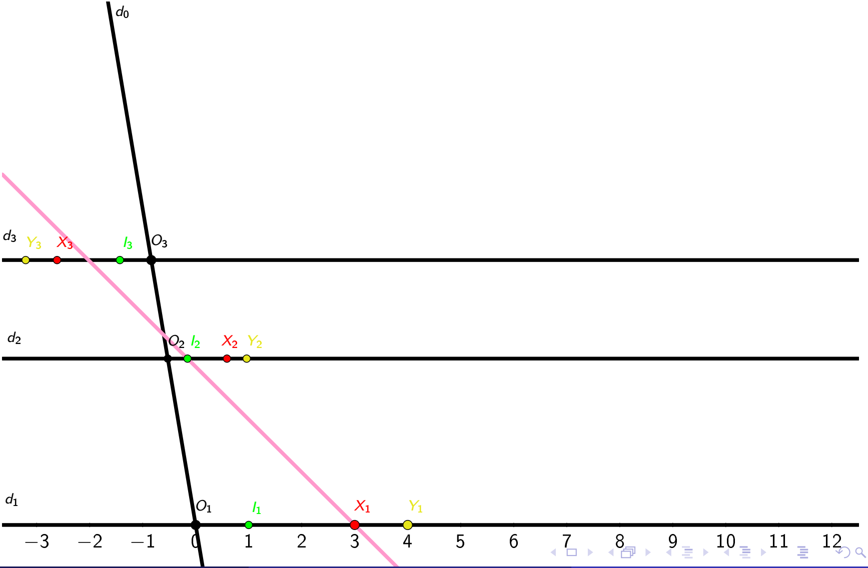
Construction de la multiplication



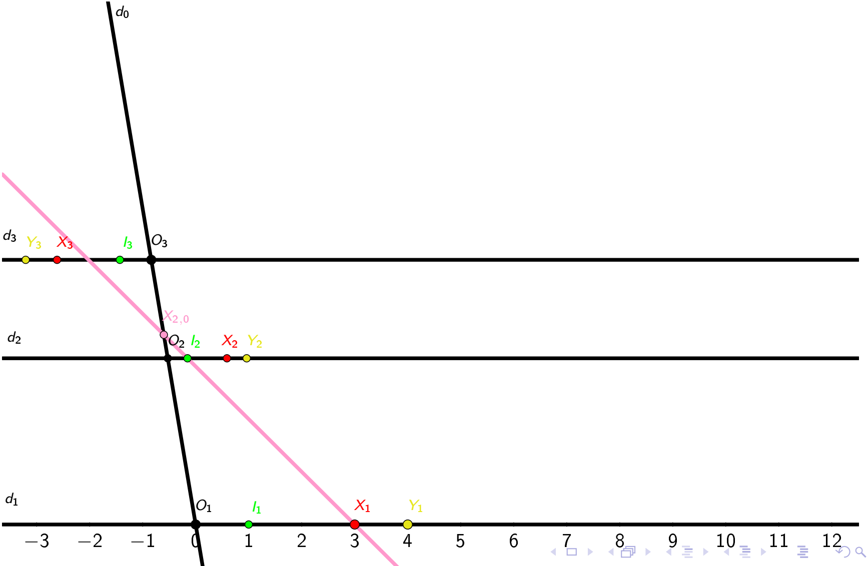
Construction de la multiplication



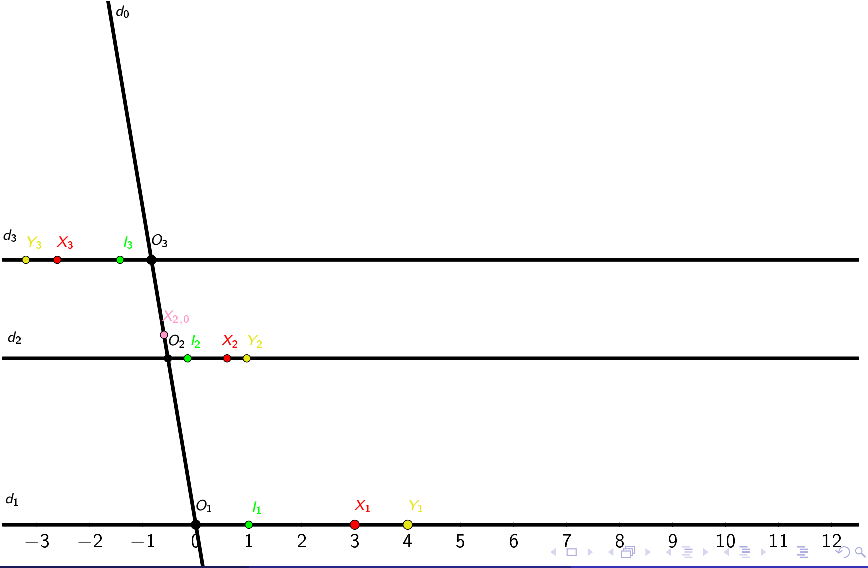
Construction de la multiplication



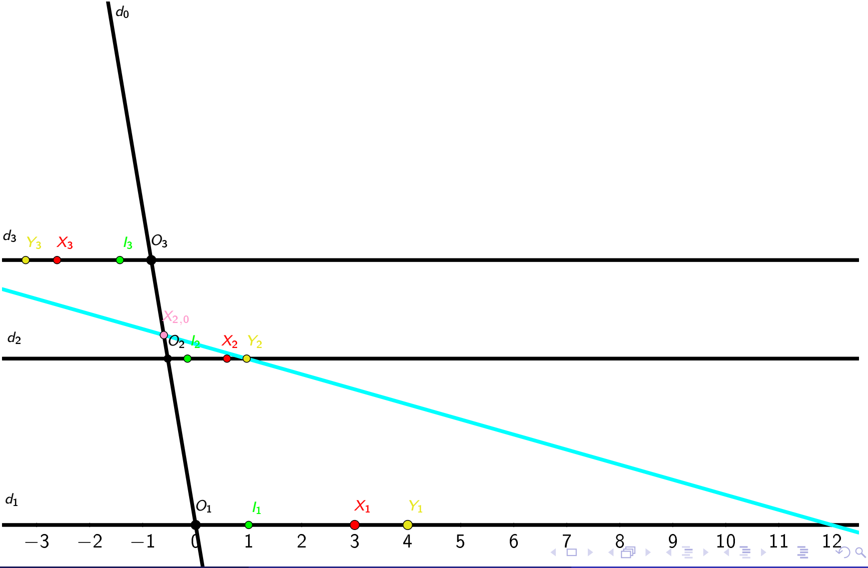
Construction de la multiplication



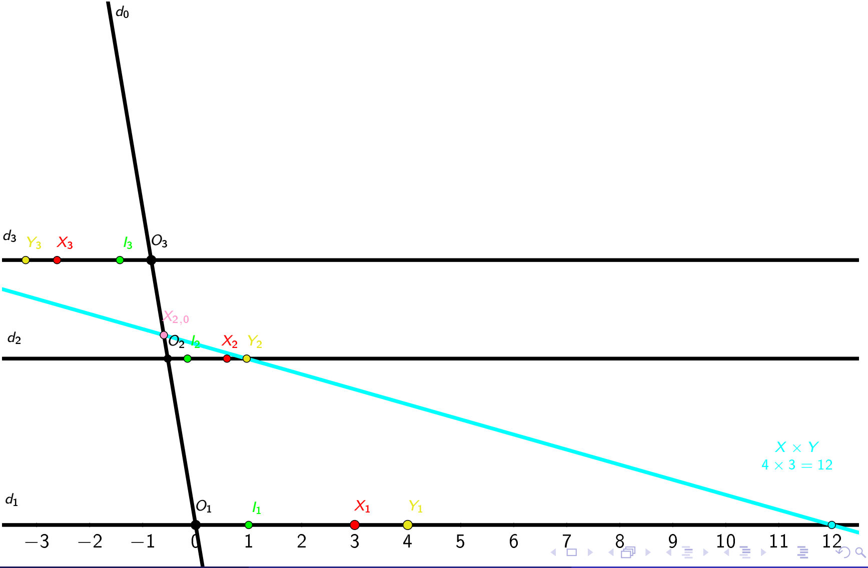
Construction de la multiplication



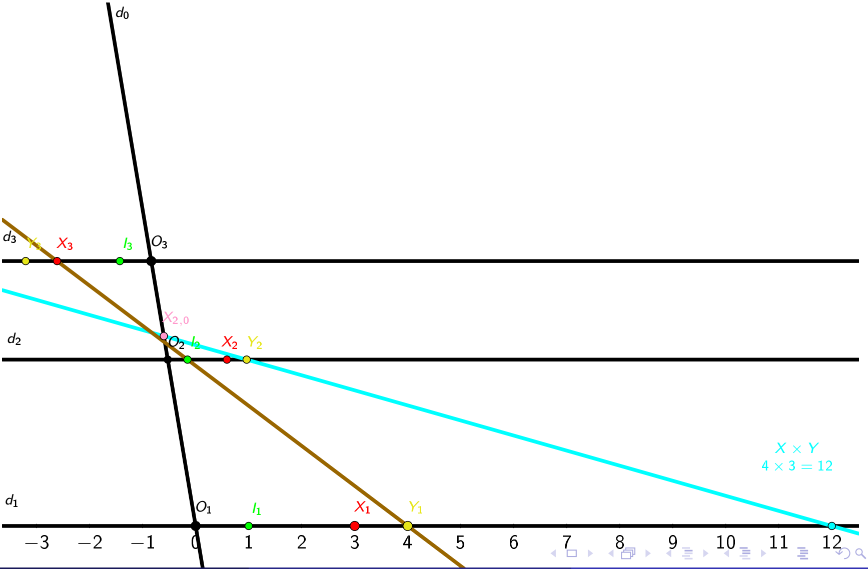
Construction de la multiplication



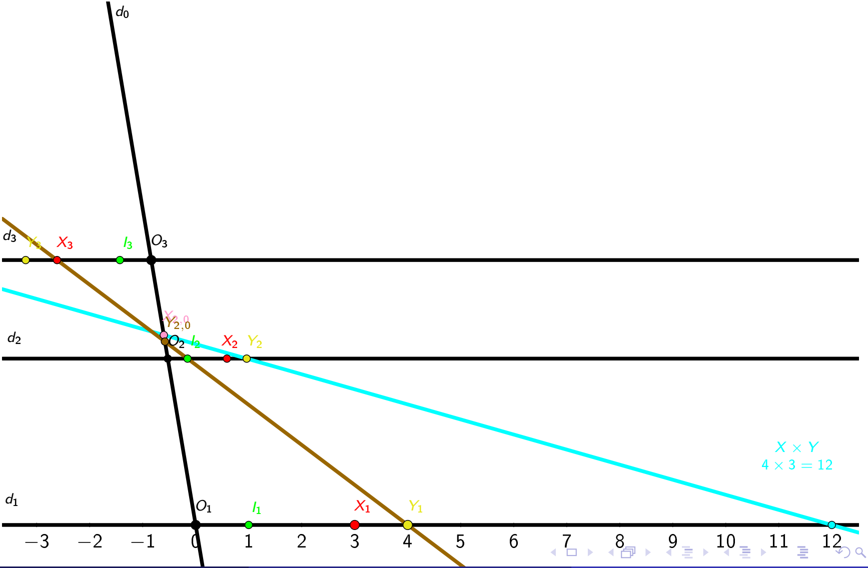
Construction de la multiplication



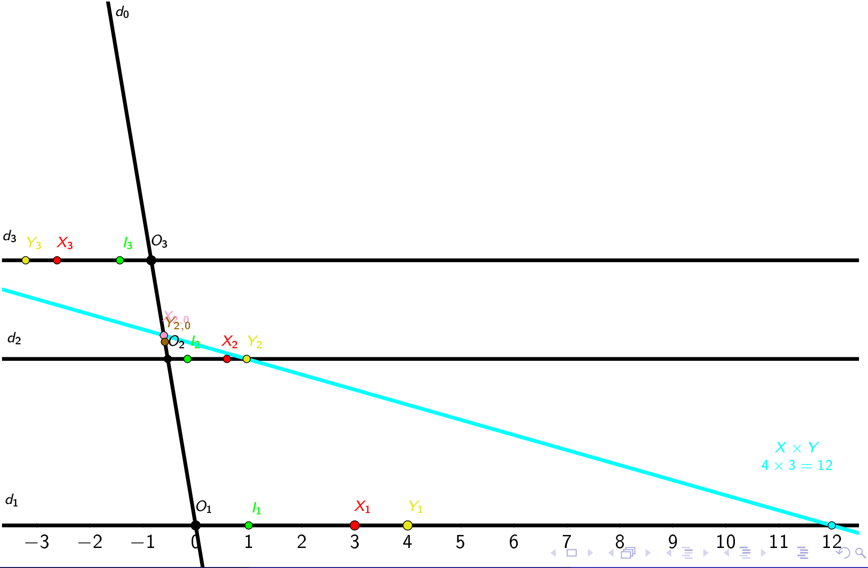
Construction de la multiplication



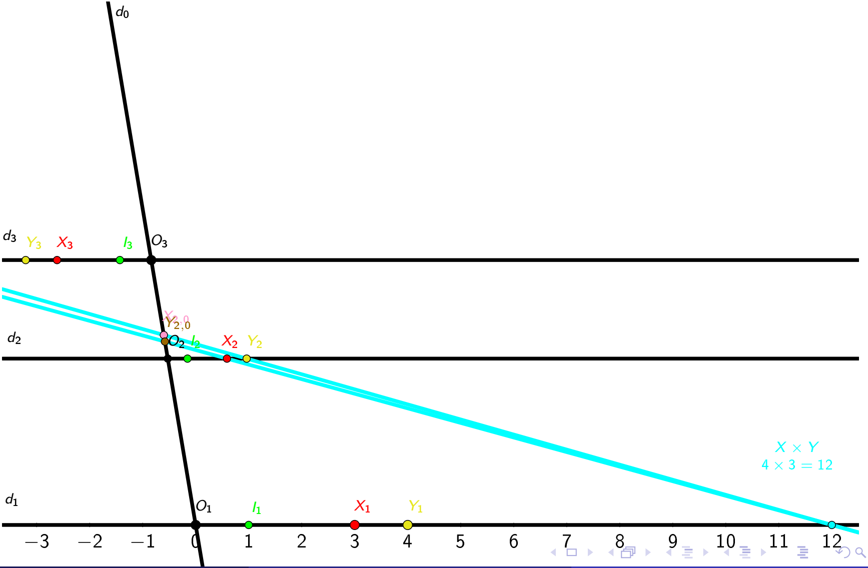
Construction de la multiplication



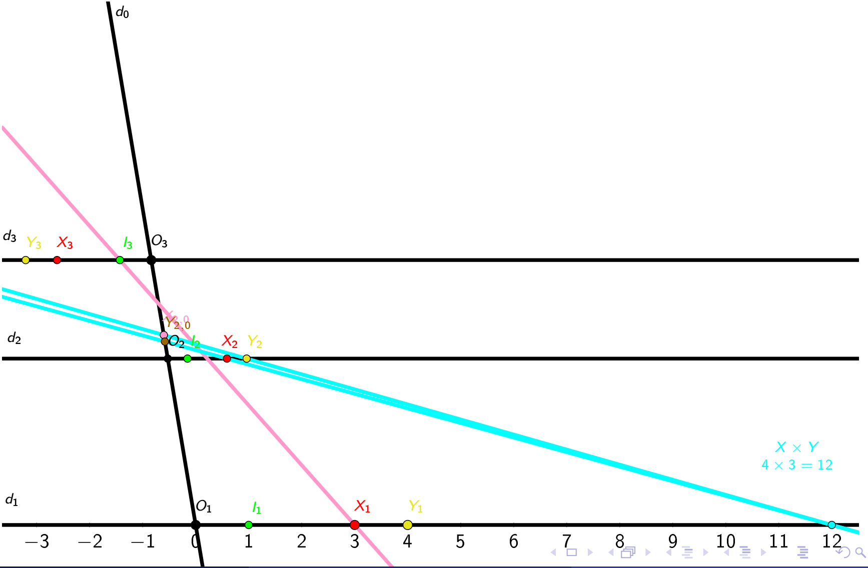
Construction de la multiplication



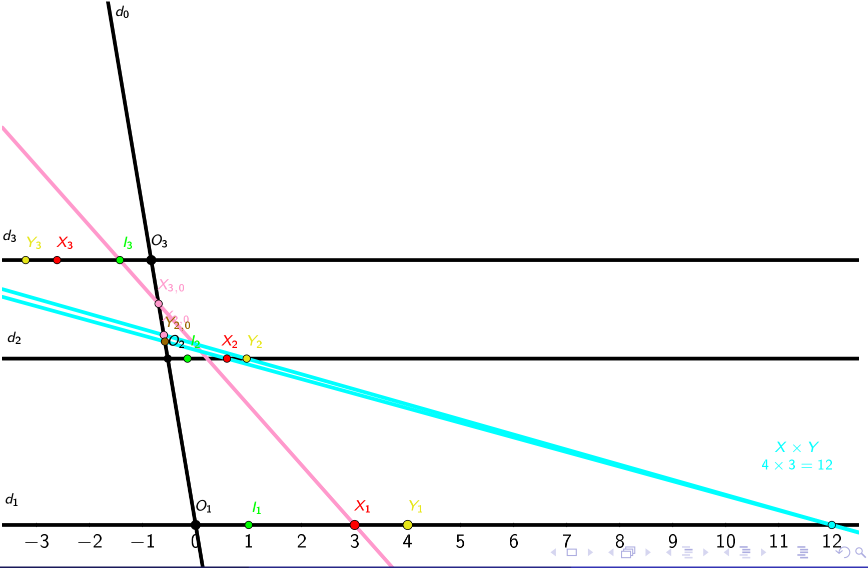
Construction de la multiplication



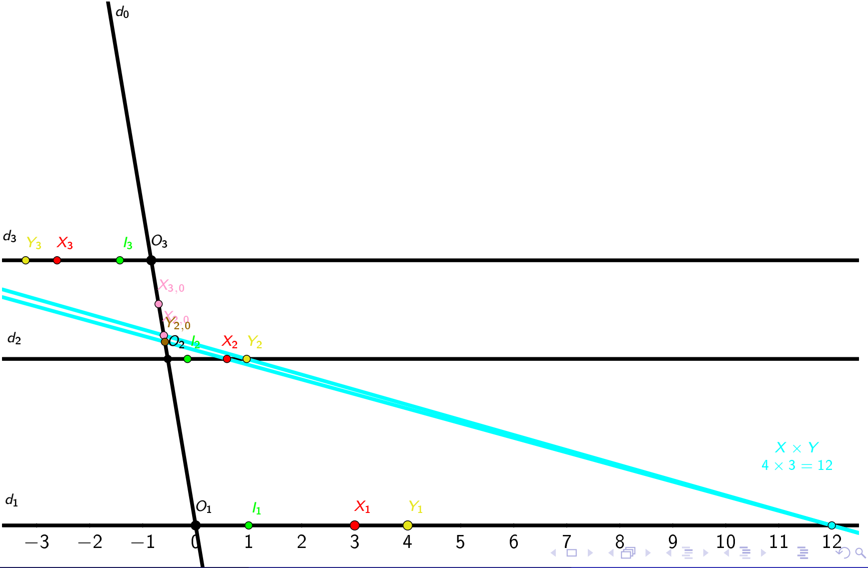
Construction de la multiplication



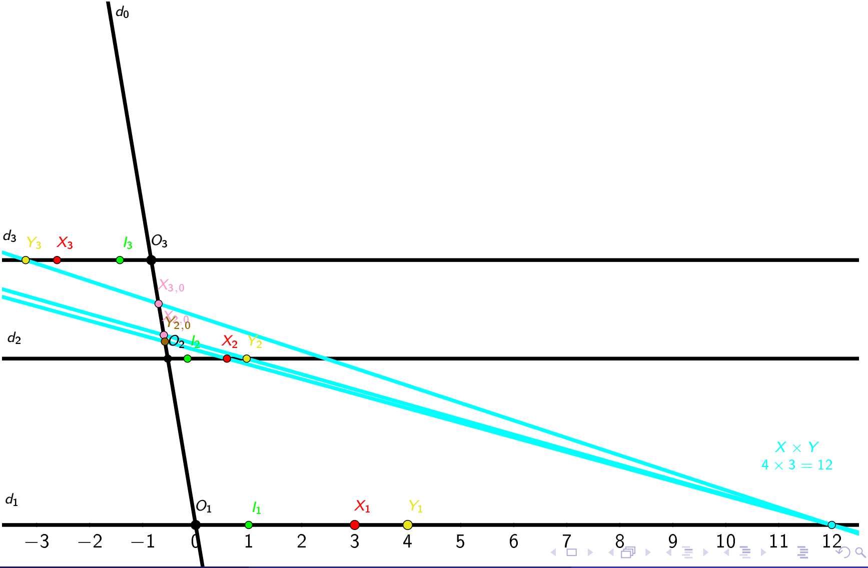
Construction de la multiplication



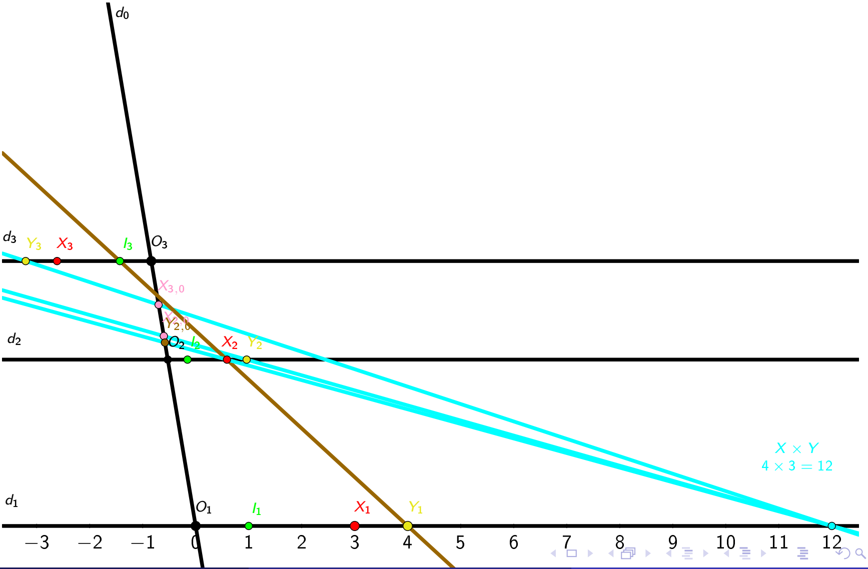
Construction de la multiplication



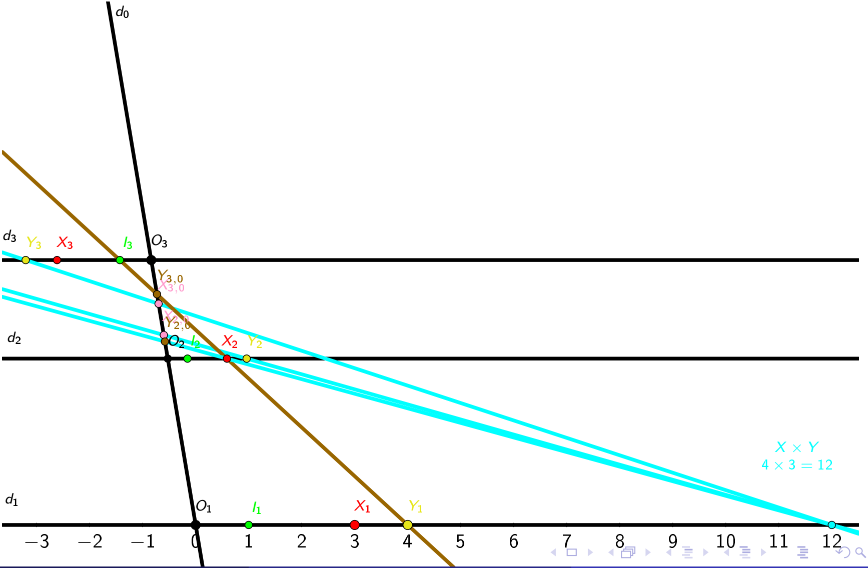
Construction de la multiplication



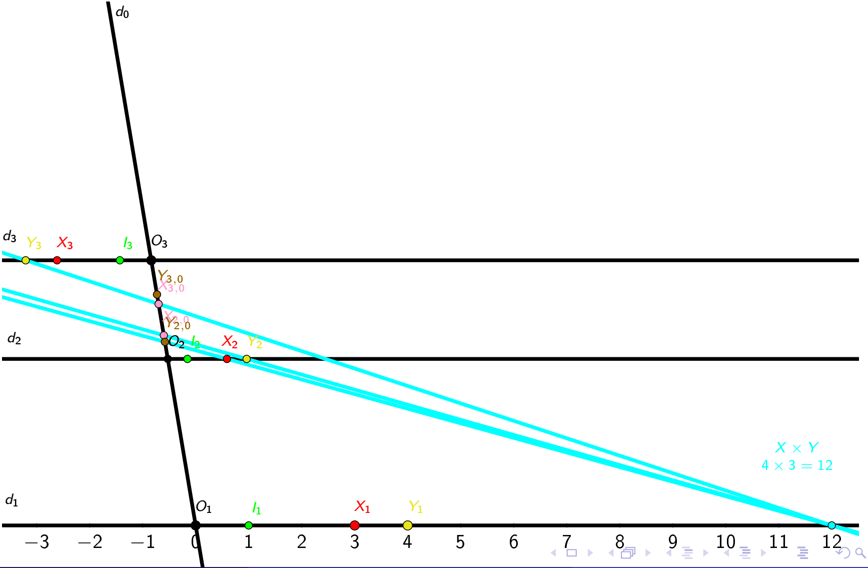
Construction de la multiplication



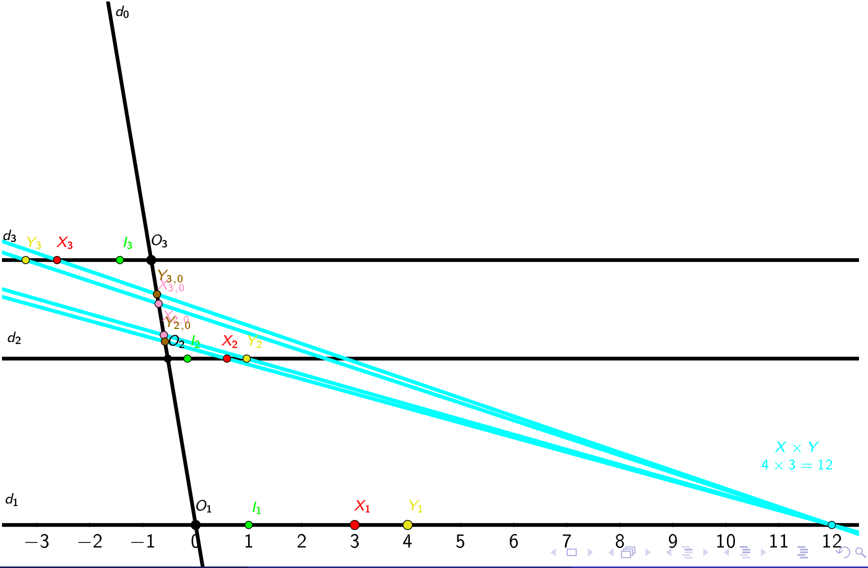
Construction de la multiplication



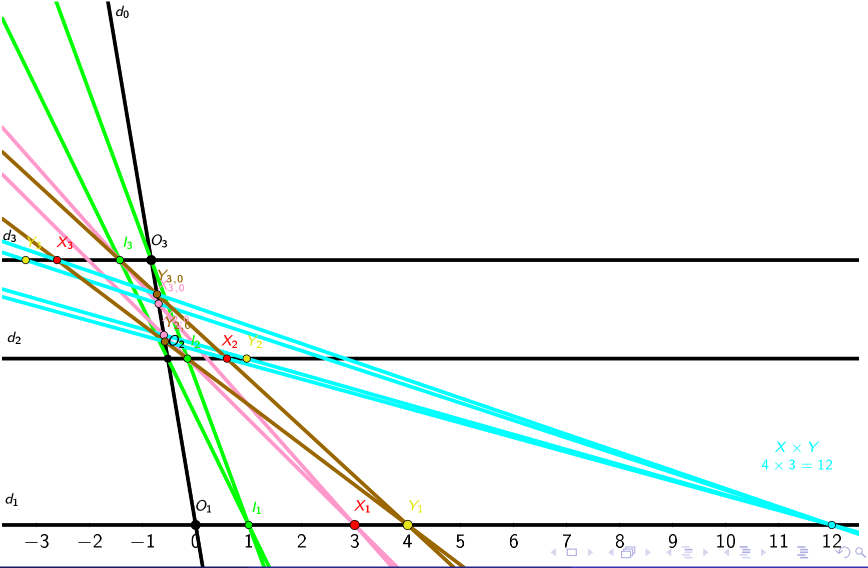
Construction de la multiplication



Construction de la multiplication



Construction de la multiplication



Et la division ?

Et la division ?

On inverse la construction de la multiplication comme on a fait pour la soustraction

Et la division ?

On inverse la construction de la multiplication comme on a fait pour la soustraction

Pour en parler, rendez-vous sur :

`https://discordapp.com/invite/ZdCymmq`

Mais au fait, pourquoi ça marche ?

Outline

1. Constructions à la règle seule
   - L'addition
   - La soustraction
   - La multiplication
2. Une brève histoire des géométries modernes
   - Aux origines : Desargues
   - Géométries
3. Éléments de démonstration
   - Une preuve pour l'addition
   - Le théorème de Desargues
   - Et pour notre construction ?

Girard Desargues 1591–1661

Architecte et mathématicien lyonnais

Girard Desargues 1591–1661

Architecte et mathématicien lyonnais

À Paris, il fréquenta plusieurs mathématiciens :

Girard Desargues 1591–1661

Architecte et mathématicien lyonnais

À Paris, il fréquenta plusieurs mathématiciens :
Descartes, Mersenne, Pascal.

Girard Desargues 1591–1661

Architecte et mathématicien lyonnais

À Paris, il fréquenta plusieurs mathématiciens :
Descartes, Mersenne, Pascal.

Il s'est intéressé aux coniques,

Girard Desargues 1591–1661

Architecte et mathématicien lyonnais

À Paris, il fréquenta plusieurs mathématiciens :
Descartes, Mersenne, Pascal.

Il s'est intéressé aux coniques,
et surtout aux dessins

GIRARD DESARGUES 1591–1661

Architecte et mathématicien lyonnais

À Paris, il fréquenta plusieurs mathématiciens :
Descartes, Mersenne, Pascal.

Il s'est intéressé aux coniques, et surtout aux dessins de droites parallèles

Girard Desargues 1591–1661

Architecte et mathématicien lyonnais

À Paris, il fréquenta
plusieurs mathématiciens :
Descartes, Mersenne, Pascal.

Il s'est intéressé aux coniques,
et surtout aux dessins
de droites parallèles
qui se rencontrent à l'infini.

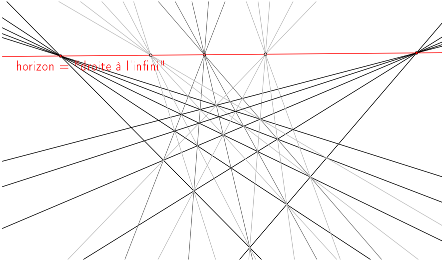
Comment ça ?
Des droites parallèles qui se rencontrent ?

Quelque chose que l'on observe parfois

Viticulture chilienne, quelque part entre Talca et Santiago, juillet 2018.

Interprétation mathématique de cette observation

Plan projectif



$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \left(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\right) / \mathbb{R}^*$$

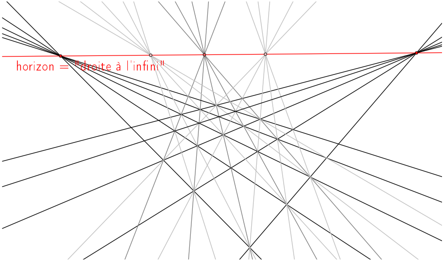
Points $\Pi = \{k \cdot v$ droites vectorielles, $v \neq 0\}$

Droites $\Delta = \{W$ plans vectoriels, $\dim(W) = 2\}$

Incidence $p = [v] \in \delta = [W] \iff kv \subset W$

Interprétation mathématique de cette observation

Plan projectif



$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \left(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\right) / \mathbb{R}^*$$

Points $\Pi = \{k \cdot v$ droites vectorielles, $v \neq 0\}$

Droites $\Delta = \{W$ plans vectoriels, $\dim(W) = 2\}$

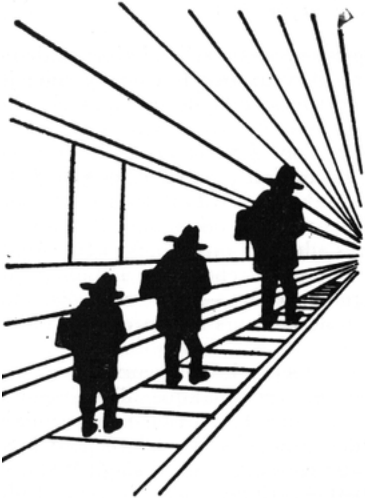
Incidence $p = [v] \in \delta = [W] \iff kv \subset W$

Proposition

Deux droites distinctes s'intersectent en un unique point.

Preuve : Deux plans vectoriels distincts s'intersectent en une droite vectorielle.

Habitude visuelle



Il existe d'autres géométries

Félix Klein 1849–1925
Mathématicien allemand

Il s'intéresse aux différentes géométries et révolutionne le point de vue.

Programme d'Erlangen

Mettre une structure mathématique pour décrire les symétries d'un espace (théorie des groupes)

Un théorème de David Hilbert

David Hilbert 1862–1943
Mathématicien allemand

Auteur de nombreux théorèmes en :

- théorie des invariants ;
- théorie des nombres ;
- théorie des ensembles ;
- analyse fonctionnelle ;
- relativité générale ;
- axiomatisation des géométries.

Grundlagen der Geometrie (1899)

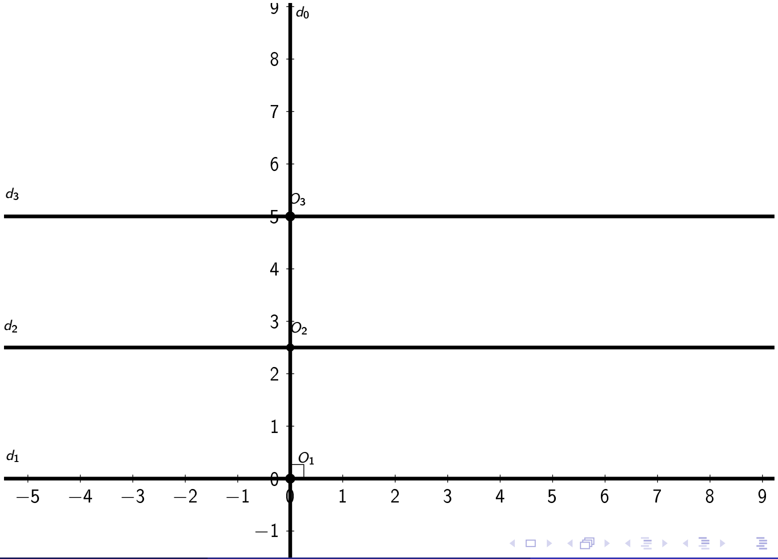
dont est issu la construction du jour !
Repose sur un théorème de Desargues.

Outline

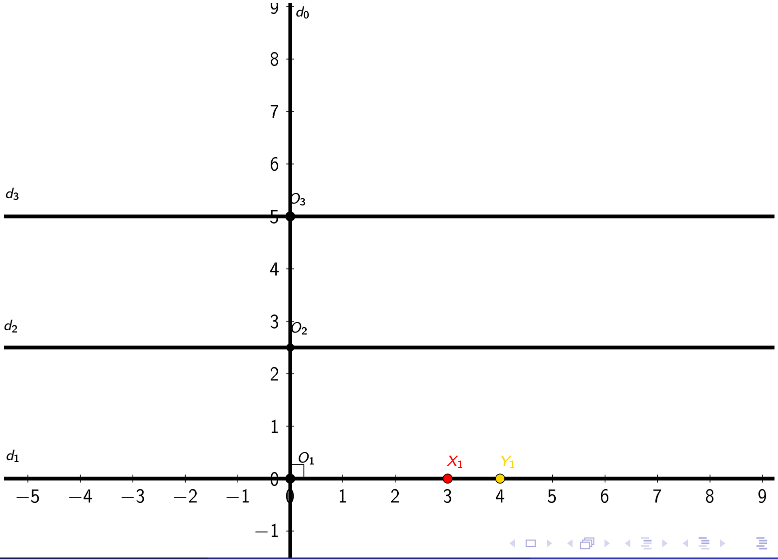
1. Constructions à la règle seule
   - L'addition
   - La soustraction
   - La multiplication
2. Une brève histoire des géométries modernes
   - Aux origines : Desargues
   - Géométries
3. Éléments de démonstration
   - Une preuve pour l'addition
   - Le théorème de Desargues
   - Et pour notre construction ?

Un cas particulier qu'on comprend à peu près bien

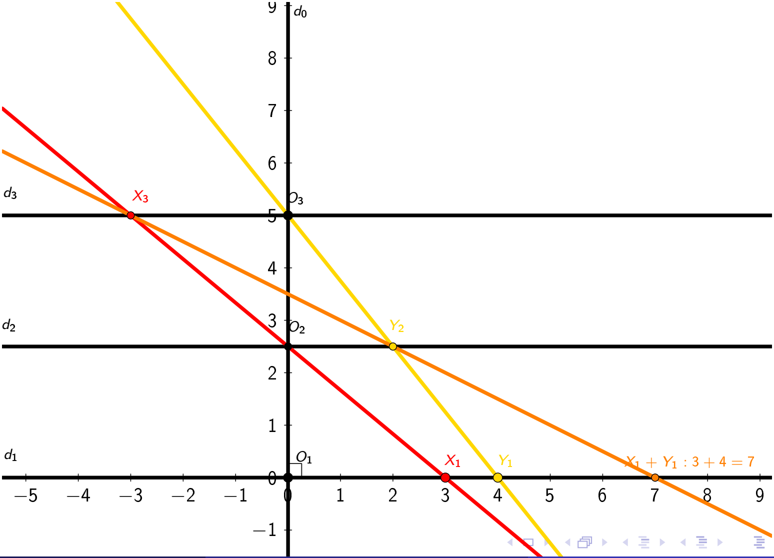
Un cas particulier qu'on comprend à peu près bien



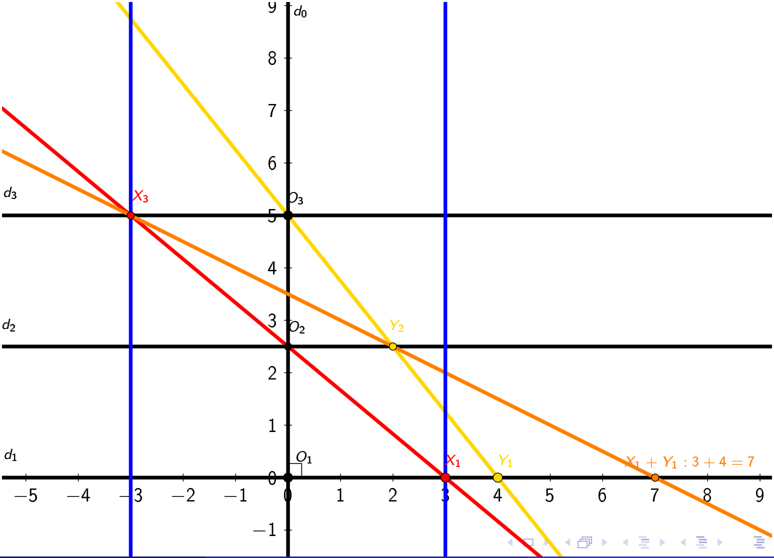
Un cas particulier qu'on comprend à peu près bien



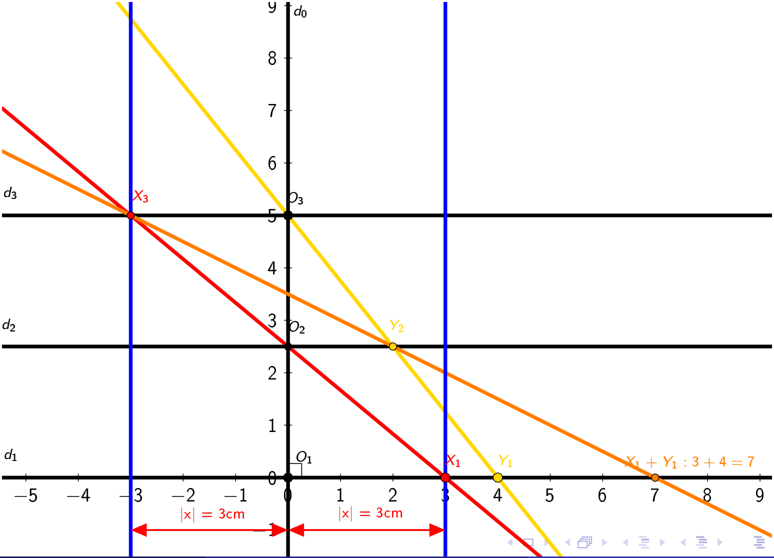
Un cas particulier qu'on comprend à peu près bien



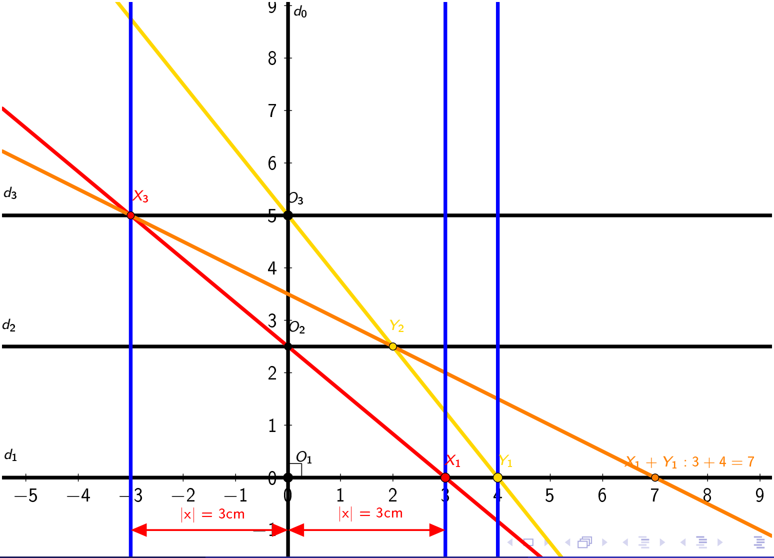
Un cas particulier qu'on comprend à peu près bien



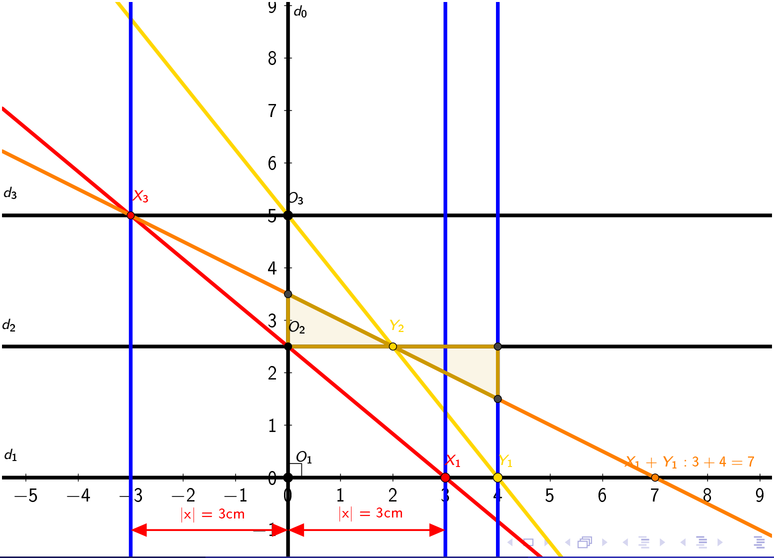
Un cas particulier qu'on comprend à peu près bien



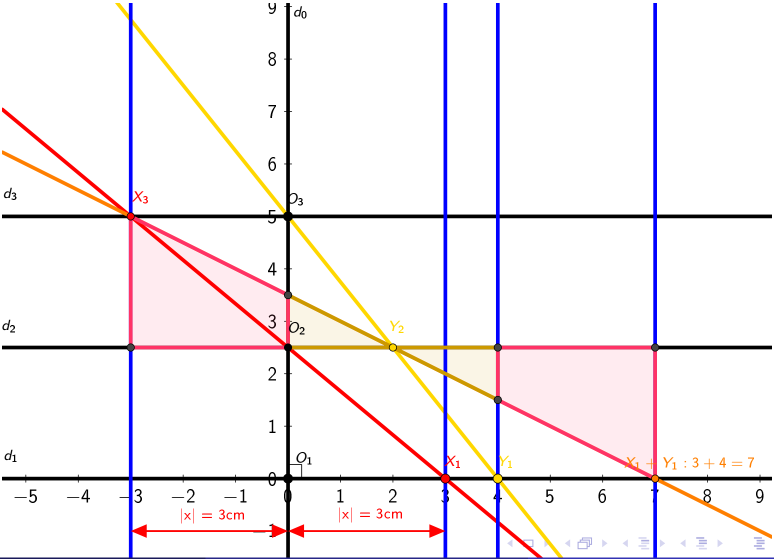
Un cas particulier qu'on comprend à peu près bien



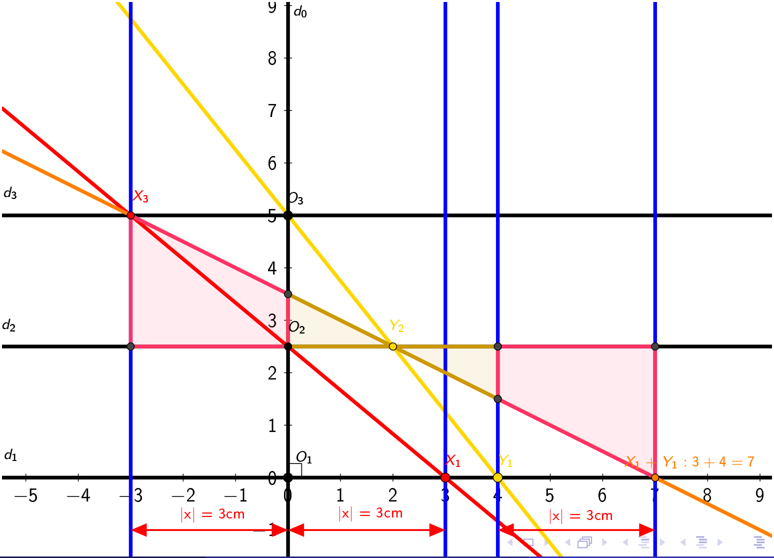
Un cas particulier qu'on comprend à peu près bien



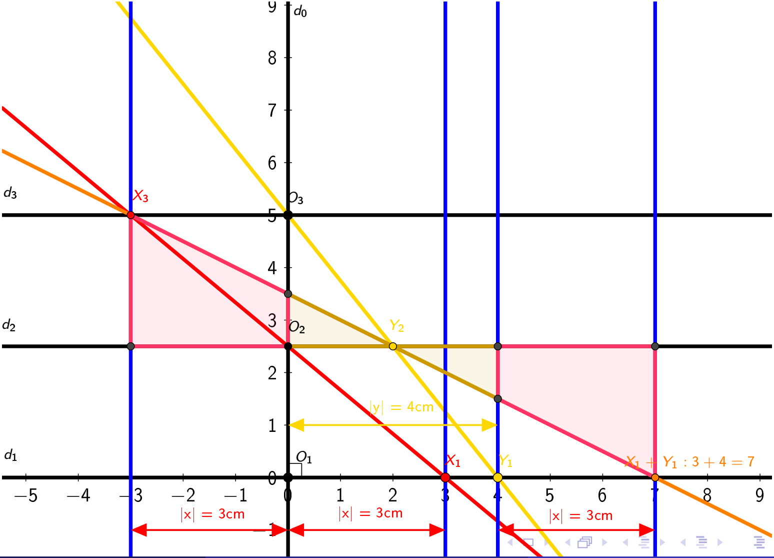
Un cas particulier qu'on comprend à peu près bien



Un cas particulier qu'on comprend à peu près bien



Un cas particulier qu'on comprend à peu près bien



On n'a fait que des intersections de droites donc

On n'a fait que des intersections de droites donc
« par invariance géométrique »
(en suivant les idées de Félix Klein)

On n'a fait que des intersections de droites donc
« par invariance géométrique »
(en suivant les idées de Félix Klein)
la construction reste valable tant que le parallélisme est préservé.

On n'a fait que des intersections de droites donc
« par invariance géométrique »
(en suivant les idées de Félix Klein)
la construction reste valable tant que le parallélisme est préservé.

Pour la multiplication, il faut faire davantage de calculs dans le cas des « droites qui nous plaisent ».

Théorème de Desargues

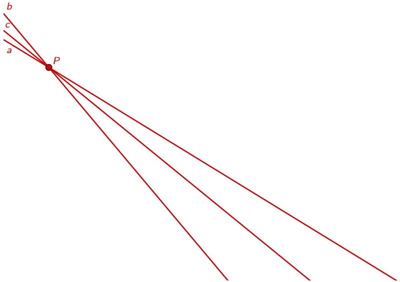
Théorème (Desargues)

Étant donnés deux triangles $A_1B_1C_1$ *et* $A_2B_2C_2$*, si les trois droites* $a = (A_1A_2)$*,* $b = (B_1B_2)$ *et* $c = (C_1C_2)$ *sont concourantes, si les trois points d'intersection* $A = (B_1C_1) \cap (B_2C_2)$*,* $B = (C_1A_1) \cap (C_2A_2)$ *et* $C = (A_1B_1) \cap (A_2B_2)$ *existent, alors ils sont alignés.*

Théorème de Desargues

Théorème (Desargues)

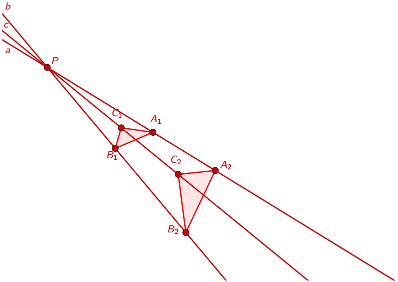
Étant donnés deux triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$, si les trois droites $a = (A_1A_2)$, $b = (B_1B_2)$ et $c = (C_1C_2)$ sont concourantes, si les trois points d'intersection $A = (B_1C_1) \cap (B_2C_2)$, $B = (C_1A_1) \cap (C_2A_2)$ et $C = (A_1B_1) \cap (A_2B_2)$ existent, alors ils sont alignés.



Théorème de Desargues

Théorème (Desargues)

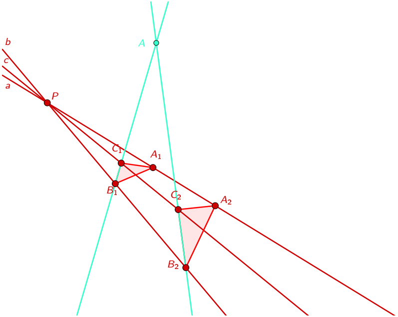
Étant donnés deux triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$, si les trois droites $a = (A_1A_2)$, $b = (B_1B_2)$ et $c = (C_1C_2)$ sont concourantes, si les trois points d'intersection $A = (B_1C_1) \cap (B_2C_2)$, $B = (C_1A_1) \cap (C_2A_2)$ et $C = (A_1B_1) \cap (A_2B_2)$ existent, alors ils sont alignés.



Théorème de Desargues

Théorème (Desargues)

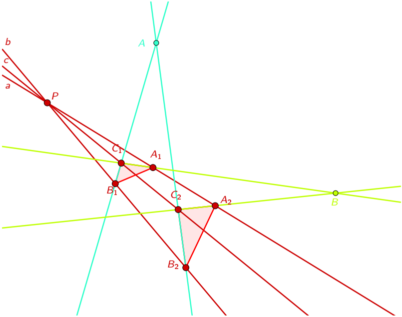
Étant donnés deux triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$, si les trois droites $a = (A_1A_2)$, $b = (B_1B_2)$ et $c = (C_1C_2)$ sont concourantes, si les trois points d'intersection $A = (B_1C_1) \cap (B_2C_2)$, $B = (C_1A_1) \cap (C_2A_2)$ et $C = (A_1B_1) \cap (A_2B_2)$ existent, alors ils sont alignés.



Théorème de Desargues

Théorème (Desargues)

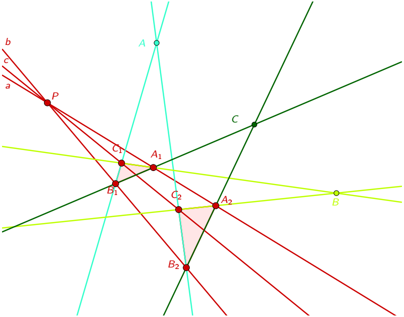
Étant donnés deux triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$, si les trois droites $a = (A_1A_2)$, $b = (B_1B_2)$ et $c = (C_1C_2)$ sont concourantes, si les trois points d'intersection $A = (B_1C_1) \cap (B_2C_2)$, $B = (C_1A_1) \cap (C_2A_2)$ et $C = (A_1B_1) \cap (A_2B_2)$ existent, alors ils sont alignés.



Théorème de Desargues

Théorème (Desargues)

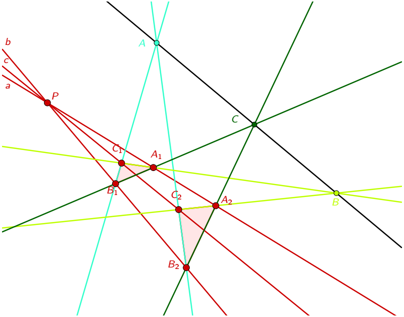
Étant donnés deux triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$, si les trois droites $a = (A_1A_2)$, $b = (B_1B_2)$ et $c = (C_1C_2)$ sont concourantes, si les trois points d'intersection $A = (B_1C_1) \cap (B_2C_2)$, $B = (C_1A_1) \cap (C_2A_2)$ et $C = (A_1B_1) \cap (A_2B_2)$ existent, alors ils sont alignés.



Théorème de Desargues

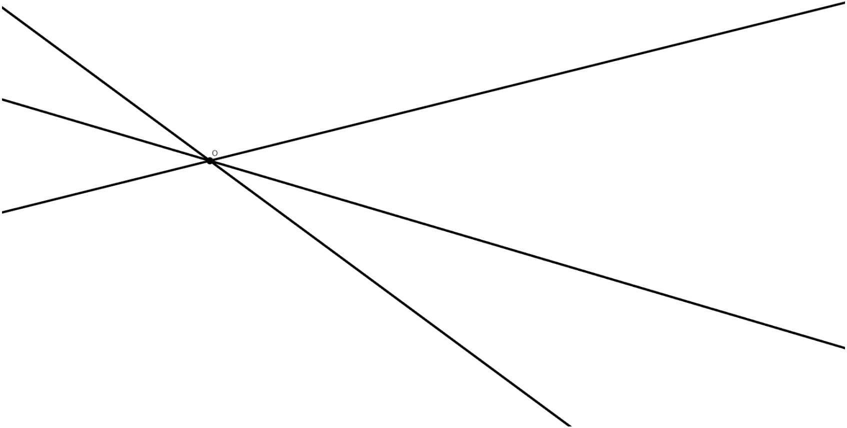
Théorème (Desargues)

Étant donnés deux triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$, si les trois droites $a = (A_1A_2)$, $b = (B_1B_2)$ et $c = (C_1C_2)$ sont concourantes, si les trois points d'intersection $A = (B_1C_1) \cap (B_2C_2)$, $B = (C_1A_1) \cap (C_2A_2)$ et $C = (A_1B_1) \cap (A_2B_2)$ existent, alors ils sont alignés.



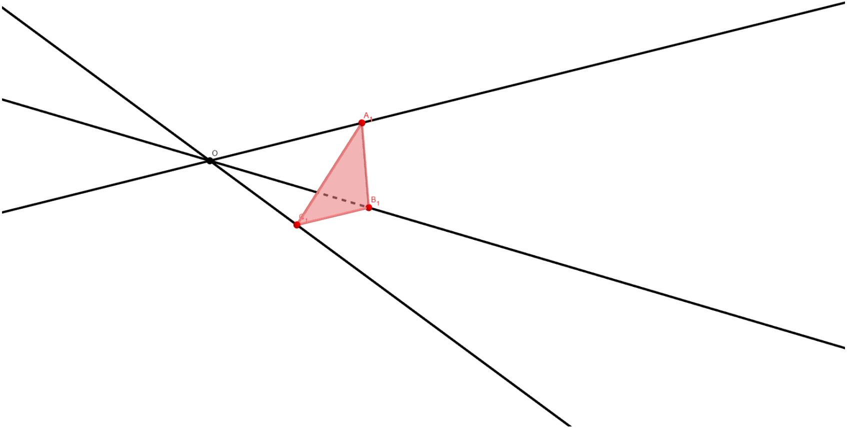
Interprétation en dimension supérieure

En fait c'est une projection sur le plan d'une construction dans l'espace !



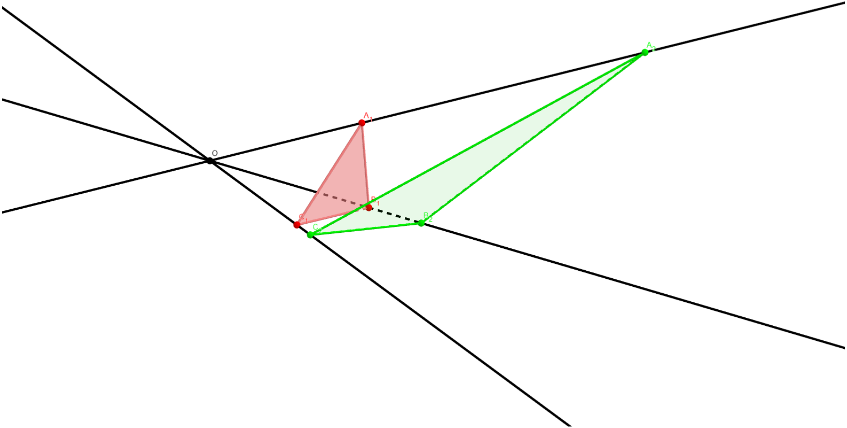
Interprétation en dimension supérieure

En fait c'est une projection sur le plan d'une construction dans l'espace !



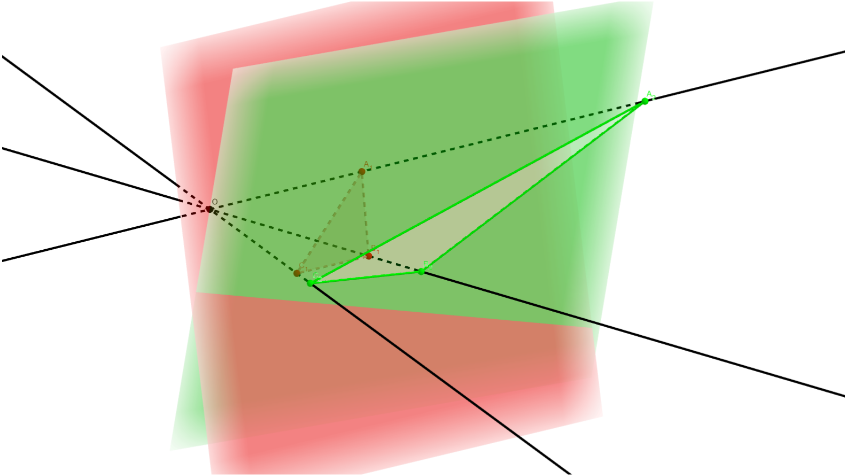
Interprétation en dimension supérieure

En fait c'est une projection sur le plan d'une construction dans l'espace !



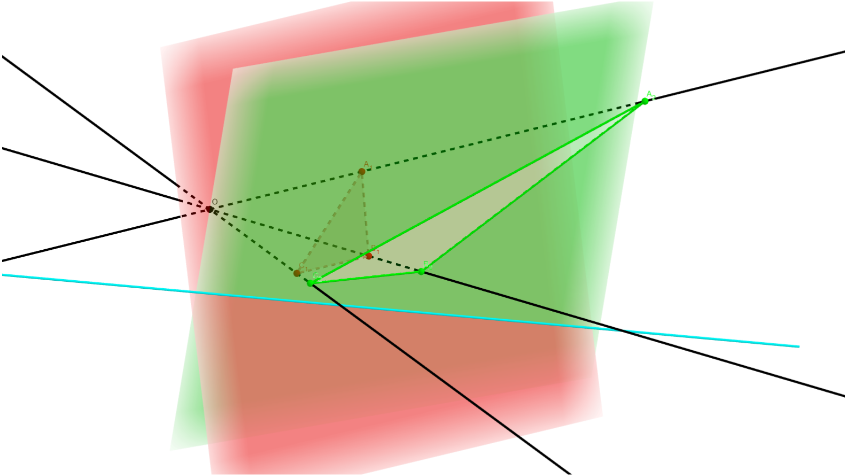
Interprétation en dimension supérieure

En fait c'est une projection sur le plan d'une construction dans l'espace !



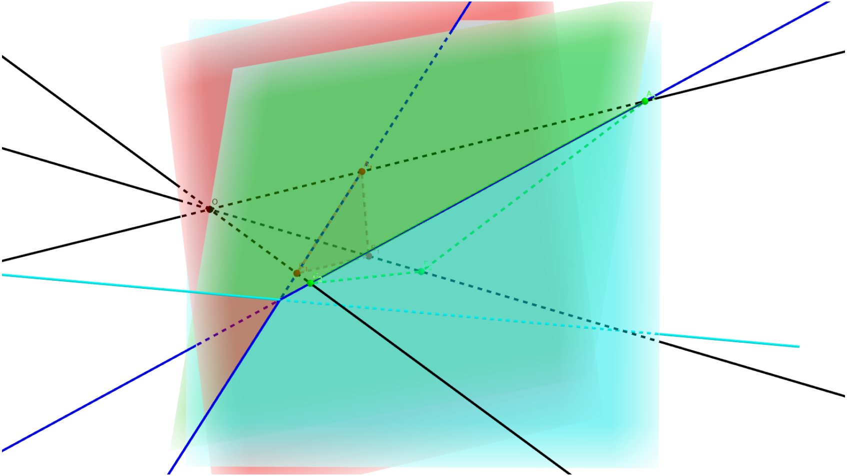
Interprétation en dimension supérieure

En fait c'est une projection sur le plan d'une construction dans l'espace !



Interprétation en dimension supérieure

En fait c'est une projection sur le plan d'une construction dans l'espace !



Pour les plus motivés

En utilisant tout ce qui a été dit dans cet exposé, essayez de démontrer, sans savoir qu'il s'agit de la multiplication, que les droites qui « fabriquent » la multiplication sont concourantes en un point de (d_1). C'est un très bon exercice d'IMO par exemple.

Attention, il faudra aussi utiliser le théorème de Pappus une fois !