Fonctions continues et différentiables sur $\mathbb{Z}_p$; théorème d'Ostrowski

Dans toute la suite, p désignera un nombre premier.

Exercice 1.

1. On suppose $p \geq 3$.
   (a) Montrer que les sous-groupes fermés non triviaux de $1 + p\mathbb{Z}_p$ sont exactement les $1 + p^n\mathbb{Z}_p$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) En déduire que $\mathbb{Z}_p^\times$ est topologiquement cyclique, c'est-à-dire qu'il contient un sous-groupe monogène dense.
2. On suppose maintenant que $p = 2$.
   (a) Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_2 & \to & 1+4\mathbb{Z}_2 \\ a & \mapsto & (1+4)^a \end{array}$ est un isomorphisme continu entre les groupes $(\mathbb{Z}_2, +)$ et $(1 + 4\mathbb{Z}_2, \times)$.
   (b) Quels sont les sous-groupes fermés de $1 + 4\mathbb{Z}_2$?
   (c) Le groupe $\mathbb{Z}_2^\times$ est-il topologiquement cyclique ?

Exercice 2.(Formule combinatoire utilisée dans la démonstration du théorème de Mahler)
Pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$, on définit $\Delta f \ : \ x \mapsto f(x+1) - f(x) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k)$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\Delta^n = \Delta \circ \cdots \circ \Delta$ composée n fois. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$, on a :
$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k)$$
2. Montrer que
$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} \binom{j}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in [\![0, m-1]\!] \\ (-1)^k & \text{si } k = m \end{cases}$$
3. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{Z}_p$, on a $\displaystyle\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \Delta^j f(x-m) = f(x)$.
4. En déduire que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, on a l'égalité :
$$\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a_{n+j}(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k+m)$$

Exercice 3.(Théorème d'Ostrowski : le cas archimédien)
Soit $|\cdot|$ une norme de corps archimédienne sur $\mathbb{Q}$ non triviale.

1. Montrer qu'il existe deux constantes $C, s \in \mathbb{R}_+^*$ telles que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on ait $|n| \leq Cn^s$.
   Indication : on pourra considérer le plus petit entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|n_0| > 1$.
2. Justifier que cette inégalité reste vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ si on prend $C = 1$.
3. Montrer qu'il existe une troisième constante $C' \in \mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on ait $|n| \geq C'n^s$.
4. En déduire que $|\cdot| = |\cdot|_\infty^s$.

Exercice 4.(Unicité de la norme p-adique) Soit $|\cdot|$ une norme de corps sur $\mathbb{Q}$ telle que :

$$\forall a \in \mathbb{Q} \qquad |a|_p < 1 \Rightarrow |a| < 1$$

1. Soit $a \in \mathbb{Q}^\times$ tel que $|a|_p < 1$. On pose $\alpha = \frac{\log |a|}{\log |p|}$ et $\beta = \frac{\log |a|_p}{\log |p|_p}$. Montrer que $\alpha = \beta$.
   Indication : on pourra considérer un rationnel $r \in \mathbb{Q}$ compris strictement entre α et β.
2. Montrer qu'il existe $s \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|\cdot| = |\cdot|_p^s$.
3. En déduire que $|\cdot|$ et $|\cdot|_p$ sont équivalentes.
4. Soit q un nombre premier. Montrer que $|\cdot|_p$ et $|\cdot|_q$ sont équivalentes si, et seulement si, $p = q$.

Exercice 5.(Formule d'interpolation de Lagrange)
Soit $f = \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n(f)\binom{\cdot}{n} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$. Soit $m \in \mathbb{N}$. On pose $P_m = \displaystyle\prod_{i=0}^{m-1}(X - i) \in \mathbb{Z}_p[X]$.

1. Pour tout $n \in [\![0, m]\!]$, on pose $L_{m,n} = \displaystyle\prod_{\substack{i=0\\ i\neq n}}^{m} \frac{X-i}{n-i} \in \mathbb{Z}_p[X]$.

   Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{m} a_n(f)\binom{X}{n} = \sum_{n=0}^{m} f(n)L_{m,n}$.
2. En déduire que $a_m(f) = m!\displaystyle\sum_{i=0}^{m} f(i)\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{m}\frac{1}{j-i}$.

Exercice 6.(Un contre-exemple au lemme de Rolle)
Trouver un exemple de fonction $f \in \mathbb{C}^1(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ et de deux éléments $a, b \in \mathbb{Z}_p$ tels que $f(a) = f(b) = 0$ mais pour tout $t \in \mathbb{Z}_p$, on ait $f'(at + b(1-t)) \neq 0$.