**Correction des exercices des feuilles précédentes ; théorème de Mahler (2)**

Dans toute la suite, $p$ désignera un nombre premier.

**Exercice 1.(Théorème d'Ostrowski : le cas archimédien)**
Soit $|\cdot|$ une norme de corps archimédienne sur $\mathbb{Q}$ non triviale.

1. Montrer qu'il existe deux constantes $C, s \in \mathbb{R}_+^*$ telles que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on ait $|n| \leq Cn^s$.
   *Indication : on pourra considérer le plus petit entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|n_0| > 1$.*
2. Justifier que cette inégalité reste vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ si on prend $C = 1$.
3. Montrer qu'il existe une troisième constante $C' \in \mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on ait $|n| \geq C'n^s$.
4. En déduire que $|\cdot| = |\cdot|_\infty^s$.

**Exercice 2.** On suppose que $p = 2$.

1. Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_2 & \to & 1+4\mathbb{Z}_2 \\ a & \mapsto & (1+4)^a \end{array}$ est un isomorphisme continu entre les groupes $(\mathbb{Z}_2, +)$ et $(1+4\mathbb{Z}_2, \times)$.
2. Quels sont les sous-groupes fermés de $1+4\mathbb{Z}_2$ ?
3. Le groupe $\mathbb{Z}_2^\times$ est-il topologiquement cyclique ?

**Exercice 3.(Isomorphismes de corps)**

1. Soit $l$ un nombre premier. Montrer que $\mathbb{Q}_l$ et $\mathbb{Q}_p$ sont isomorphes (en tant que corps) si, et seulement si, $l = p$.
2. Soit $a \in \mathbb{Q}_p^\times$. Montrer que $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ si, et seulement si, il existe une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $\exists u \in \mathbb{Z}_p,\ a^{p-1} = u^n$.
3. Soit $\varphi : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$ un morphisme d'anneaux non nul. Montrer que $\varphi$ est une isométrie.
4. En déduire le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}_p)$ des automorphismes de corps de $\mathbb{Q}_p$.

**Exercice 4.** Notons $\mu(\mathbb{Q}_p)$ l'ensemble des racines de l'unité de $\mathbb{Q}_p^\times$.

1. On suppose $p \neq 2$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\zeta$ une racine $n$-ème de l'unité.
   (a) On suppose que $\zeta \in 1 + p\mathbb{Z}_p$ et on écrit $\zeta = 1 + pt$. Montrer que $t = 0$ ou $p \mid n$.
   (b) On suppose que $n = p$. Montrer que $t = 0$.
   (c) Justifier que $\mu(\mathbb{Q}_p)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}_p^\times$.
   (d) En déduire que $\mu(\mathbb{Q}_p) = \mu_{p-1}$ est cyclique d'ordre $p-1$.
   *Indication : on pourra considérer l'homomorphisme de groupes $\varphi : \mu(\mathbb{Q}_p) \to \mathbb{F}_p^\times$ obtenu par réduction modulo $p$.*
2. On suppose désormais que $p = 2$. Montrer que $\mu(\mathbb{Q}_2) = \{\pm 1\}$.

**Exercice 5.(Unicité de la norme $p$-adique)** Soit $|\cdot|$ une norme de corps sur $\mathbb{Q}$ telle que :

$$\forall a \in \mathbb{Q} \qquad |a|_p < 1 \Rightarrow |a| < 1$$

1. Soit $a \in \mathbb{Q}^\times$ tel que $|a|_p < 1$. On pose $\alpha = \frac{\log|a|}{\log|p|}$ et $\beta = \frac{\log|a|_p}{\log|p|_p}$. Montrer que $\alpha = \beta$.
   *Indication : on pourra considérer un rationnel $r \in \mathbb{Q}$ compris strictement entre $\alpha$ et $\beta$.*
2. Montrer qu'il existe $s \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|\cdot| = |\cdot|_p^s$.
3. En déduire que $|\cdot|$ et $|\cdot|_p$ sont équivalentes.
4. Soit $q$ un nombre premier. Montrer que $|\cdot|_p$ et $|\cdot|_q$ sont équivalentes si, et seulement si, $p = q$.

**Exercice 6.**

1. Justifier que toute fonction continue $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ est bornée.
2. Calculer $\|f\|_p$ pour $x \mapsto \binom{px}{n}$ et $x \mapsto x^p - x$.

**Exercice 7.** Dans cet exercice, on suppose $p = 2$.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction continue $f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Q}_2$ telle que pour tout $t \in 2\mathbb{Z}$, on a $f(t) = \frac{t}{2}$ et pour tout $t \in 2\mathbb{Z} + 1$, on a $f(t) = \frac{t-1}{2}$.
2. Déterminer les coefficients de la décomposition de Mahler de $x \mapsto (-1)^x$.
3. En déduire les coefficients de la décomposition de Mahler de $f$.