Prolongement de la norme p-adique

Dans toute la suite, p désignera un nombre premier.

Exercice 1. (Extensions quadratiques) Soit $K/\mathbb{Q}_p$ une extension de degré 2.

1. Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{Z}$ sans facteurs carrés tel que $K \simeq \mathbb{Q}_p(\sqrt{d})$.
2. Cet entier d est-il unique ?
3. Déterminer une expression de la norme de K qui étend $|\cdot|_p$.
4. Déterminer $\mathrm{val}_p(K^\times)$ en distinguant les cas $\mathrm{val}_p(d) = 0$ et $\mathrm{val}_p(d) = 1$.

Exercice 2. Soit L une extension algébrique de $\mathbb{Q}_p$. Soit $a \in K$ algébrique sur $\mathbb{Q}_p$ de degré inférieur ou égal à m et b algébrique sur $\mathbb{Q}_p$ de degré inférieur ou égal à n. On pose $K = \mathbb{Q}_p(a, b)$. Que peut-on dire de $[K : \mathbb{Q}_p]$? En déduire que $a + b$ est algébrique sur $\mathbb{Q}_p$ de degré inférieur ou égal à mn.

Exercice 3. Dans cet exercice, on prend $p = 3$ et on considère le polynôme $P = X^3 - X - 1$.

1. Vérifier que P est sans racines sur $\mathbb{F}_3$.
2. Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Q}_3$.

Soit K un corps de rupture de P sur $\mathbb{Q}_3$ et α une racine de P dans K.

3. Soit $x \in K$. Calculer la matrice de $m_x : y \mapsto xy$ dans la base $(1, \alpha, \alpha^2)$.
4. En déduire une expression de la norme de corps qui étend $|\cdot|_3$ à K.
5. Déterminer $\mathrm{val}_3(\alpha)$ puis $\mathrm{val}_3(K^\times)$.

Exercice 4. Le but de cet exercice est de donner une autre démonstration du résultat suivant :

Soit $Q \in \mathbb{Q}_p[X]$ un polynôme de degré $d \geq 2$. Si Q est irréductible et si $Q(0) \in \mathbb{Z}_p$, alors $Q \in \mathbb{Z}_p[X]$.

Soit C la matrice compagnon de Q.

1. Vérifier que $|\det(C)|_p \leq 1$ et que C n'est pas nilpotente.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un coefficient $c_{i_k, j_k} := c_k$ de C^k tel que $\|C^k\| = |c_k|_p$.
3. On suppose que la suite $(\|C^k\|)_k$ est non bornée. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{Z}_p)$ qui commute à C telle que $\|A\| = 1$ et $\det(A) = 0$.
   Indication : considérer une valeur d'adhérence de la suite C^k/c_k.
4. En déduire que $(\|C^k\|)_k$ est bornée, puis que $\|C\| = 1$.
5. Conclure.

Exercice 5. On prend $p = 11$. Soit $a = \sqrt[3]{2}$ une racine de $P = X^3 - 2$ et $b = j$ une racine de $Q = X^2 + X + 1$. On note $K = \mathbb{Q}_{11}(\sqrt[3]{2})$ et $L = K(j)$.

1. Trouver un polynôme de degré inférieur ou égal à 6 annulant $a + b$.
2. Calculer $[K : \mathbb{Q}_{11}]$ puis $[L : \mathbb{Q}_{11}]$.
3. Déterminer une expression de la norme de K qui étend $|\cdot|_{11}$ puis de celle de L.
4. Montrer que $K/\mathbb{Q}_{11}$ n'est pas galoisienne mais que $L/\mathbb{Q}_{11}$ est galoisienne.
5. Déterminer $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_{11})$.
6. Vérifier que pour tout $x \in L$, on a $|x|_p^6 = \prod_{g \in G} g(x)$.
7. Que se passe-t-il si $p = 5$? si $p = 7$?