Révisions sur les groupes et représentations

Leçons concernées (2019)

(101) Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
(102)* Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.
(103)* Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.
(104) Groupes finis. Exemples et applications.
(105) Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
(106) Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.
(107)* Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Exemples.
(108) Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
(110)* Structure et dualité des groupes abéliens finis. Applications.
(150)* Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.
(183) Utilisation des groupes en géométrie.
(190) Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Ce qui est dans le programme

(a) Groupes, morphismes de groupes. Produit direct de groupes. Sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Ordre d'un élément. Sous-groupes distingués (ou normaux), groupes quotients. Action d'un groupe sur un ensemble. Stabilisateur d'un point, orbites, espace quotient. Formule des classes. Classes de conjugaison. Application à la détermination des groupes d'isométries d'un polytope régulier en dimension 2 et 3.

(b) Groupes cycliques. Groupes abéliens de type fini. Groupe des racines complexes n-ièmes de l'unité, racines primitives.

(c) Groupe des permutations d'un ensemble fini. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions, en produit de cycles à supports disjoints. Signature. Groupe alterné. Application : déterminants.

(d) Définition des groupes classiques d'automorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie : groupe général linéaire, groupe spécial linéaire ; groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal ; groupe unitaire, groupe spécial unitaire.

(e) Représentations d'un groupe fini sur un C-espace vectoriel. Cas d'un groupe abélien. Orthogonalité des caractères irréductibles. Groupe dual. Transformée de Fourier. Convolution. Cas général. Théorème de Maschke. Caractères d'une représentation de dimension finie. Fonctions centrales sur le groupe, base orthonormée des caractères irréductibles. Exemples de représentations de groupes de petit cardinal.

Bibliographie

Pour le cours

- J.-M. Arnaudiès et J. Bertin, *Groupes, algèbres et géométrie.*
  Un classique, avec des dessins et groupes de polyèdres réguliers.
- M. Artin, *Algebra.*
  Pour ceux qui aime vivre dangereusement.
- M. Audin, *Géométrie.*
  Un livre pour travailler les groupes en géométrie.
- A. Bouvier et D. Richard, *Groupes, observation, théorie, pratique.*
  À l'ancienne.
- J. Calais, *Éléments de théorie des groupes.*
  Assez complet sur les groupes.
- P. Caldero et G. Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries.*
  Pour $\mathrm{GL}(E)$ et ses sous-groupes.
- J.-C. Carrega, *Théorie des corps - La règle et le compas.*
  Bien pour la cyclotomie ou pour ceux qui osent parler de théorie de Galois et de nombres constructibles.
- P. Colmez, *Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres).*
  Cours donné à l'École polytechnique, un peu rapide par endroit. Utile pour les représentations.
- F. Combes, *Algèbre et géométrie.*
  Couvre bien le programme d'algèbre en agreg.
- M. Demazure, *Cours d'algèbre.*
  Quelques résultats de calcul formel pour dire des choses avancées (conseillé à l'option C).
- R. Goblot, *Algèbre commutative.*
  Bien pour le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.
- X. Gourdon. *Algèbre*. Ellipse, 2009.
  Un classique assez standard, niveau L2.
- R. Mneimné et F. Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques.* Hermann, 1986.
  Assez spécialisé, si vous voulez inclure des résultats spécifiques sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Attention, quelques coquilles peuvent s'y glisser : soyez vigilants !
- A. Paugam, *Agrégation de mathématiques – Questions délicates en algèbre et géométrie.* Dunod, 2007.
  Très bien pour réviser les quotients.
- D. Perrin, *Cours d'algèbre.*
  Un résumé de résultats classiques et mine de développements.
- G. Peyré, *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier.*
  Très riche pour travailler les représentations et caractères.
- M. Ramis et A. Warusfel, *Mathématiques, tout-en-un pour la licence*, niveau L2, L3.
  Un pavé de résultats élémentaires.
- J.-E. Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre & géométrie.*
  Couvre le programme de l'agrégation.
- J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis.*
  Une référence très complète sur les représentations de groupes.
- P. Tauvel, *Algèbre.* Dunod, 2005.
  Un standard niveau L3.

Les mines d'exercices

- S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas. *Oraux X-Ens, algèbre 1.*
- Aviva Szpirglas *Exercices d'algèbre.*
- I. Nourdin, *Agrégation de mathématiques : épreuves orales.*

1 Groupes en action

La structure de groupe est la structure algébrique la plus élémentaire qu'on puisse mettre sur un ensemble. Historiquement, les groupes sont apparus comme familles de permutations des racines d'un polynôme, de sorte que les relations qu'entretiennent les racines entre elles soient toujours vérifiées.

Par la suite, la géométrie a connu une évolution retentissante avec le point de vue de Félix Klein : définir une géométrie c'est définir l'action d'un groupe sur un ensemble, par exemple par transformations affines, par isométries d'un espace euclidien, par homographies sur un espace projectif, ...

Premières définitions

- Groupe, groupe abélien, produit direct, morphisme de groupes, noyau, image.
- Sous-groupe, groupe engendré par une partie, réunion croissante, intersection quelconque.
- Ordre d'un élément.

Action d'un groupe sur un ensemble

- Définitions équivalentes : morphisme de groupe $\varphi : G \to \mathrm{Bij}(X)$ / vs / application $\alpha : G \times X \to X$ telle que $\alpha(g, x) = \varphi(g)(x) = g \cdot x$.
- Stabilisateur :
  - d'un point : $G_x = \mathrm{Stab}_G(x) = \{g \in G, g \cdot x = x\}$ est un sous-groupe
  - d'une partie : $G_{\{Y\}} = \mathrm{Stab}_G(\{Y\}) = \{g \in G, g \cdot Y = Y\}$ (attention au signe « = ») ; c'est le stabilisateur du point Y pour l'action de G sur $\mathcal{P}(X)$ par $g \cdot Y = \{g \cdot y,\ y \in Y\}$.
  - point par point : $G_Y = \mathrm{Stab}_G(Y) = \{g \in G, g \cdot y = y \quad \forall y \in Y\} = \bigcap_{y \in Y} \mathrm{Stab}_G(y)$
- Formule des stabilisateurs $\mathrm{Stab}_G(g \cdot x) = g\,\mathrm{Stab}_G(x) g^{-1}$. En particulier, si l'action est transitive, alors les stabilisateurs sont conjugués.
- Points fixes (parfois appelé fixateur) :
  - d'un élément : $X^g = \{x \in X,\ g \cdot x = x\} = \{x \in X,\ g \in \mathrm{Stab}_G(x)\}$
  - d'un sous-groupe : $X^H = \bigcap_{h \in H} X^h$
- Noyau d'une action $\ker \varphi = G_X$.
- Action fidèle : $\ker \varphi = G_X = 1$; fidélisation : $G/\ker \varphi$ agit fidèlement.
- Orbite : $G \cdot x = \{g \cdot x,\ g \in G\}$; vérifier que $\mathcal{O}$ est une orbite c'est (0) $\mathcal{O}$ est non vide (1) $\mathcal{O}$ est G-stable (2) L'action de G sur $\mathcal{O}$ est transitive.
- Action libre : Tous les stabilisateurs sont triviaux $\Leftrightarrow$ tous les fixateurs sont vides ; libre $\Rightarrow$ fidèle
- Action transitive : G agissant sur X admet une unique orbite, i.e. $\forall x, y \in X\ \exists g \in G\ g \cdot x = y$.
- Action n-transitive : Action transitive sur $\mathcal{P}_n(X)$ pour $g \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (g \cdot x_1, \ldots, g \cdot x_n)$ Exemple : $\mathfrak{S}_m$ sur $X = [\![1, m]\!]$ où $n \leq m$.
- Action exactement n-transitive : Action qui est n-transitive mais pas $n+1$-transitive. Exemple : l'action de $\mathrm{PGL}_2(K)$ sur $\mathbb{P}^1(K)$ est exactement 3-transitive (cela permet de définir le birapport).
- Famille de représentants : la relation « être dans une même orbite » est une relation d'équivalence, donc X se partitionne en orbites. Famille de représentants = choix d'un élément dans chaque orbite.
- Action simplement transitive : action libre et transitive $\forall x, y \in X\ \exists! g \in G\ g \cdot x = y$. Exemple : groupe agissant sur lui-même par multiplication ; groupe linéaire sur les bases

Action d'un groupe sur lui-même par multiplication

- Par multiplication à gauche, par multiplication par l'inverse à droite. Application : Théorème de Cayley = Tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$, donc à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ pour tout corps $\mathbb{K}$.
- Indice d'un sous-groupe : si H ssgr de G, l'indice $[G : H]$ est le nombre d'orbites de l'action de H par multiplication sur G. Application : Théorème de Lagrange = l'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe. En particulier, l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe (hypothèse de groupe fini !)
- Équation aux classes : $|G \cdot x| = [G : \mathrm{Stab}_G(x)]$ Dem : $G/\mathrm{Stab}_G(x) \to G \cdot x$ est une bijection.
- Formule des classes : $|X| = \sum_{i \in I} [G : \mathrm{Stab}_G(x_i)]$ où $(x_i)_{i \in I}$ famille de représentants
- Formule de Burnside : $|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$: Application : Tout sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ agissant transitivement sur $[\![1, n]\!]$ contient une permutation sans points fixes.

Action d'un groupe sur lui-même par conjugaison

C'est $\begin{array}{rccc} \varphi : & G & \to & \mathrm{Bij}(G) \\ & g & \mapsto & (h \mapsto ghg^{-1}) \end{array}$. On appelle automorphismes intérieurs les éléments de l'image de φ (qui sont bien des automorphismes de groupe). $\ker \varphi = \mathcal{Z}(G)$ est le centre de G. On note $\mathrm{Int}(G) = \mathrm{im}\,\varphi$ et $\mathrm{Out}(G) = \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Int}(G)$. Remarques (1) $\mathrm{Int}(G)$ est distingué dans $\mathrm{Aut}(G)$ donc $\mathrm{Out}(G)$ est un groupe. (2) On a un isomorphisme $\mathrm{Int}(G) \simeq G/\mathcal{Z}(G)$.

- Centralisateur = stabilisateur point par point pour cette action
- Normalisateur = stabilisateur d'une partie ; c'est le plus grand sous-groupe normal contenant la partie
- Classe de conjugaison = orbite pour cette action
- Action fidèle ssi le centre est trivial (l'action n'est vraiment pas fidèle pour les groupes abéliens !)
- Action libre ssi le groupe est trivial (l'action n'est vraiment pas libre !)
- Sous-groupe normal H si $\mathcal{N}_G(H) = G$
- Sous-groupe central H si $\mathcal{Z}_G(H) = G$
- Sous-groupe distingué H : sous-groupe vérifiant les conditions équivalentes :
  (i) H est un sous-groupe normal de G, i.e. $\mathcal{N}_G(H) = G$;
  (ii) H est stable par tout automorphisme intérieur ;
  (iii) Pour tout $g \in G$, on a $gHg^{-1} = H$;
  (iv) H est le noyau d'un morphisme de groupes.
- L'image inverse d'un ssgr distingué est un ssgr distingué, c'est faux pour l'image.
- Groupe quotient, morphisme quotient, factorisation des morphismes : Si $f : G \to H$ est un morphisme de groupes, isomorphisme $G/\ker f \cong \mathrm{im}\, f$, suite exactes de groupes.
- Tout sous-groupe d'indice 2 de G est distingué.
- Théorème d'isomorphisme : si H, K sont deux sous-groupes de G avec $H \triangleleft G$ alors $H \cap K \triangleleft K$ et $HK/H \cong K/H \cap K$.
- Sous-groupe caractéristique : sous-groupe stable par tout automorphisme. Un sous-groupe caractéristique d'un sous-groupe caractéristique (resp. distingué) est caractéristique (resp. distingué). Toute autre assertion admet un contre-exemple (Penser à $\mathfrak{S}_4$). Exemple : Le groupe dérivé $\mathcal{D}(G)$ engendré par les commutateurs d'éléments de G est caractéristique ; le centre $\mathcal{Z}(G)$ est caractéristique.

p-groupes

- Théorème de Cauchy : un groupe fini d'ordre divisible par p admet un élément d'ordre p.
- Un p-groupe non trivial admet un centre non trivial.
- Un p-groupe a des sous-groupes distingués de tous les indices possibles (en particulier il est résoluble).
- Tout groupe de cardinal p^2 est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.
- Exemple de groupe de cardinal p^3 non abélien.
- Théorèmes de Sylow.

Groupes monogènes et cycliques ; groupes abéliens de type fini

- Groupe monogène : groupe engendré par 1 élément, est isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- Groupe cyclique d'ordre n, noté C_n : groupe monogène fini, isomorphe au groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- Sous-groupes de $\mathbb{Z}$ ou de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: ce sont les $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ où $d|n$ avec par convention $n = 0$ pour $\mathbb{Z}$.
- Si $x, y \in G$ abélien sont d'ordres exacts m et n, il existe un élément dans $\langle x, y\rangle$ d'ordre exact le ppcm de m et n.
- Structure des groupes abéliens finis et de type fini.
- Le groupe dual de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est canoniquement isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.
- Le groupe dual d'un groupe abélien est isomorphe à lui-même, son bidual canoniquement isomorphe.
- Générateurs et automorphismes de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Le groupe des racines de l'unité

- Cyclicité des sous-groupes finis de K^*, K corps commutatif.
- Connexité, compacité, sous-groupes discrets, racines de l'unité.
- Surjectivité de $x \mapsto e^{ix}$, isomorphisme avec $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, construction de π.
- Structure de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, angles orientés.

Groupes diédraux

- Définition par générateurs et relations, types d'éléments.
- Construction comme produit semi-direct.

Groupes de permutation

- Conjugaison d'une permutation écrite comme produit de cycles à supports disjoints, classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$.
- La signature est l'unique morphisme non trivial de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{\pm 1\}$ (et même $\mathbb{C}^*$).
- Les k-cycles avec $k \leq n-2$ sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$.
- Familles de générateurs classiques de $\mathfrak{S}_n$: les transpositions, $\{(i\ i+1), i \in \{1, \cdots, n-1\}\}$, et $\{(1\,2), (1 \cdots n)\}$. Il faut au minimum $n-1$ transpositions pour engendrer $\mathfrak{S}_n$ donc la deuxième famille est minimale.
- Le groupe $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles pour $n \geq 3$.
- $(*)$ Tous les automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ sont intérieurs sauf pour $n = 6$.
- Simplicité de $\mathfrak{A}_n$ pour $n \geq 5$, groupe de Klein pour $n = 4$.
- Le groupe $\mathfrak{A}_n$ est le groupe dérivé de $\mathfrak{S}_n$ pour tout n, et de lui-même pour $n \geq 5$.

Groupes linéaires

- Centres de $\mathrm{GL}_n(K)$ et $\mathrm{SL}_n(K)$.
- Cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$.
- Actions matricielles par conjugaison, équivalence et congruence. Invariants (totaux si possibles).
- p-Sylow explicite de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.
- Les transvections sont toutes conjuguées dans $\mathrm{GL}_n(K)$.
- Simplicité de $\mathrm{PSL}_n(k)$ sauf si $n = 2$ et $k = \mathbb{F}_2$ ou $\mathbb{F}_3$.
- Générateurs de $\mathrm{GL}_n(K)$ et $\mathrm{SL}_n(K)$.
- Connexité par arcs, densité, de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, de même pour les SL_n.
- Sous-groupes remarquables $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $U_n(\mathbb{C})$, topologie (notamment connexité), générateurs.
- Décomposition polaire.
- Simplicité de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ voire des $\mathrm{PSO}_n(\mathbb{R})$ $(*)$, $n \geq 5$.
- Plongement de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathrm{GL}_n(K)$, lien entre déterminant et signature.
- Isomorphismes exceptionnels :

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \cong \mathfrak{S}_3, \quad \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \cong \mathfrak{S}_4; \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \cong \mathfrak{A}_4$$
$$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \cong \mathfrak{A}_5$$
$$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \cong \mathfrak{S}_5\ (*), \quad \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5) \cong \mathfrak{A}_5\ (*).$$

Représentations linéaires de groupes et tables de caractères

- Caractère associé à une représentation linéaire d'un groupe fini.
- Lemme de Schur et théorème de Maschke
- Le caractère détermine la représentation et sa décomposition.
- Orthonormalité des caractères irréductibles, relations dans la table de caractères.
- Lire sur la table de caractères : le sous-groupe dérivé, le centre, les sous-groupes distingués.
- Irréductibilité de la représentation standard de $\mathfrak{S}_n$.

2 Groupes linéaires

Soit A un anneau commutatif (unitaire [*]) et E un A-module.

Définition 2.1. On appelle *groupe général linéaire* sur E, noté $\mathrm{GL}(E)$, le groupe des automorphismes de A-modules de E. C'est aussi le groupe des éléments inversibles de la A-algèbre $\mathrm{End}_A(E)$.

Si E est un A-module libre de type fini, de rang n et de base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, on a un isomorphisme $\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(E) & \simeq & \mathrm{GL}_n(A) \\ g & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \end{array}$. Plus simplement, si A est un corps (on le notera plutôt K), alors E est un espace vectoriel et c'est donc en particulier un module libre [†].

Dans toute la suite on suppose désormais que E est un A-module **libre de type fini**, de rang $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 2.2. Un groupe G est dit *linéaire* s'il existe un anneau commutatif A et un A-module libre de type fini E tel que $\mathrm{GL}(E)$ pour un certain A.

On remarquera que si A est intègre, on peut se ramener au cas des corps en considérant $K = \mathrm{Frac}(A)$ et $\mathrm{GL}_n(A)$ comme sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$. Ceci est typiquement le cas si on travaille sur l'anneau $A = k[X]$ des polynômes en une variable à coefficients dans un corps k.

On dispose par ailleurs d'un morphisme de groupes $\det : \mathrm{GL}_n(A) \to A^\times$ qui nous permet de définir, via l'isomorphisme $\mathrm{GL}(E) \simeq \mathrm{GL}_n(A)$, un morphisme de groupes $\mathrm{GL}(E) \to A^\times$. Ce dernier ne dépend pas de la base choisie et on le note encore $\det : \mathrm{GL}(E) \to A^\times$.

Définition 2.3. On appelle *groupe spécial linéaire*, noté $\mathrm{SL}(E)$ le noyau du morphisme $\det : \mathrm{GL}(E) \to A^\times$.

On sait d'emblée que c'est un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}(E)$ et que $\mathrm{GL}(E)/\mathrm{SL}(E) \simeq \mathrm{im}(\det) = A^\times$ (la surjectivité se vérifie grâce aux matrices de dilatation).

Dans le cadre de l'agrégation, il faudra supposer que $A = K$ est un corps et que E est un K-espace vectoriel de dimension fini. Pour effectuer convenablement un pivot de Gauss, il suffit en fait de supposer que A est principal (par exemple Euclidien). Attention : l'algorithme est mis en défaut si l'anneau A ne dispose pas des identités de Bézout ! Sur les anneaux factoriels, on ne peut donc pas dire grand chose.

2.1 Pivot de Gauss

Pour la simplicité, je me restreins ici au cas d'un corps K. Vous verrez sans doute des variantes de l'algorithme sur un corps ou un anneau principal dans le cours sur les matrices, ou dans le cours d'option C.

On se place dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(K)$ des matrices carrées à coefficients dans K.

Remarque 2.4. L'algorithme du pivot de Gauss est en fait plus général et permet d'échelonner des matrices non carrées dans un anneau principal. Demandez à le voir en cours de Matrices.

On rappelle que la matrice $E_{i,j}$ est la matrice ayant des coefficients nuls partout sauf celui à la ligne i et à la colonne j qui vaut alors 1. On note $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ le symbole de Kronecker, de sorte que $E_{i,j} = (\delta_{i,k}\delta_{j,l})_{1 \le k,l \le n}$ et $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.

Définition 2.5. On appelle :
- *matrice de transvection* d'indice (i, j) avec $1 \le i, j \le n$ et $i \neq j$ et de rapport $\lambda \in K$ la matrice $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$;
- *matrice de dilatation* d'indice $i \in [\![1, n]\!]$ et de rapport $\mu \in K^*$ la matrice $D_i(\mu) = I_n + (\mu - 1)E_{i,i}$;
- *matrice de permutation* associée à $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ la matrice $P_\sigma = \sum_{i=1}^n E_{i,\sigma(i)}$.

Ces définitions n'ont d'intérêt que pour $\lambda \in K \setminus \{0\}$ et $\mu \in K \setminus \{0, 1\}$. On prendra soin de traiter le cas du corps à deux éléments à part.

Fait 2.6. *On a, pour tous i, j, λ, σ :*
- $\det D_i(\lambda) = \lambda$ *et donc* $D_i(\lambda) \in \mathrm{GL}_n(K)$, *de plus* $D_i(\lambda)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$;
- $\det T_{i,j}(\lambda) = 1$ *et donc* $T_{i,j}(\lambda) \in \mathrm{SL}_n(K)$, *de plus* $T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$;
- $\det P_\sigma = \varepsilon(\sigma)$ *et donc* $P_\sigma \in \mathrm{GL}_n(K)$, *de plus* $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.

∗. On s'en tiendra à la définition Bourbakiste suivant laquelle tout anneau est par définition unitaire.

†. Si E est de dimension infinie, on peut alors réaliser $\mathrm{GL}(E)$ comme limite inductive de groupes linéaires finis sur l'ensemble inductif partiellement ordonné des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E.

Quelques calculs : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice quelconque. Notons $L_1, \dots, L_n$ ses lignes et $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes. On a :

- $T_{i,j}(\lambda)A$ est la matrice dont les lignes sont $L_1, \dots, L_{i-1}, L_i + \lambda L_j, L_{i+1}, \dots, L_n$, opération associée : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$;
- $D_i(\mu)A$ est la matrice dont les lignes sont $L_1, \dots, L_{i-1}, \mu L_i, L_{i+1}, \dots, L_n$, opération associée : $L_i \leftarrow \mu L_i$;
- $P_{(i\ j)}A$ est la matrice dont les lignes sont $L_1, \dots, L_{i-1}, L_j, L_{i+1}, \dots, L_{j-1}, L_i, L_{j+1}, \dots, L_n$, opération associée : $L_i \leftrightarrow L_j$;

- $AT_{i,j}(\lambda)$ est la matrice dont les colonnes sont $C_1, \dots, C_{j-1}, C_j + \lambda C_i, C_{j+1}, \dots C_n$, opération associée : $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$;
- $AD_j(\mu)$ est la matrice dont les colonnes sont $C_1, \dots, C_{j-1}, \mu C_j, C_{j+1}, \dots, C_n$, opération associée : $C_j \leftarrow \mu C_j$;
- $AP_{(i\ j)}$ est la matrice dont les colonnes sont $C_{(i\ j)(1)}, \dots, C_{(i\ j)(n)}$, opération associée : $C_j \leftrightarrow C_i$.

Remarque 2.7. Par facilité, quitte à multiplier P_σ par $D_1(\varepsilon(\sigma))$, on peut s'arranger pour que les opérations sur les lignes et les colonnes des matrices de permutation soient aussi dans $\mathrm{SL}_n(K)$.

Ce qu'il faut retenir :

(1) agir à par multiplication à gauche (L = Left = Lignes) c'est modifier les **lignes**, dans les formules, c'est la ligne i qui est changée ;

(2) agir à par multiplication à droite c'est modifier les **colonnes**, dans les formules, c'est le j qui est changé.

(3) Pour retrouver les formules, il suffit de faire le calcul avec une matrice 2×2 sur son brouillon.

Lemme 2.8. *(1) Les opérations élémentaires par multiplication à gauche ne changent pas le noyau d'une matrice.*

(2) Les opérations élémentaires par multiplication à droite ne changent pas l'image d'une matrice.

(3) Les opérations élémentaires par multiplication à droite ou à gauche ne changent pas le rang d'une matrice.

Démonstration. (1) Il suffit d'observer que $\ker A = \bigcap_{i=1}^{n} \ker L_i = \mathrm{Vect}(L_1^*, \dots, L_n^*)^\top$.

(2) Il suffit d'observer que $\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n)$.

(3) C'est une conséquence du théorème du rang et des points (1) et (2). □

Théorème 2.9 (Pivot de Gauss)**.** *Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice de rang r. Alors il existe des familles de matrices de transvection, permutation et dilatations $(A_1, \dots, A_s)$ et $(B_1, \dots, B_t)$ telles que $A_s \cdots A_1 M B_1 \dots B_t = J_r$.*

Démonstration. On procède par récurrence sur n. Si $n \leq 1$, il suffit de faire une dilatation.

Hérédité : On considère la première ligne et la première colonne de la matrice M.

Si toutes deux sont nulles, alors on prend $A_1 = P_{(1\ n)} = B_1$ de sorte que la dernière ligne et la dernière colonne de $A_1 M B_1$ sont nulles et on considère la matrice extraire $M' \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$ des $n-1$ premières lignes et colonnes de M. L'hypothèse de récurrence permet de trouver des matrices de transvection, dilatation et permutation qui transforment M' en une matrice $J_{r'} \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$. Quitte à compléter ces matrices par une ligne et une colonne dont seul le dernier coefficient est 1, ce sont toujours des matrices de transvection, dilatation et permutation qui transforment $A_1 M B_1$ en $J_{r'} \in \mathcal{M}_n(K)$.

Si l'une des deux est non nulle, disons la première ligne, alors on peut opérer sur les colonnes par une matrice de permutation A_1 pour que le premier coefficient de $A_1 M$ soit non nul. Par une matrice de dilatation B_1, on peut alors faire en sorte que le premier coefficient de $A_1 M B_1$ soit égal à 1. Par des opérations de soustraction via les matrices de transvection des lignes et colonnes, on peut alors se ramener au cas où la première ligne et la première colonne de $A_s \cdots A_1 M B_1 \cdots B_t$ n'ont que le premier coefficient non nul. Soit M' la matrice extraite des $n-1$ dernières lignes et colonnes de cette dernière matrice. Par hypothèse de récurrence, on trouve des opérations élémentaires qui transforment M' en $A_{s'} \cdots A_{s+1} M' B_{t+1} \cdots B_{t'} = J_{r'} \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$. En complétant comme précédemment les matrices, on obtient que $A_{s'} \cdots A_1 M B_1 \cdots B_{t'} = J_{r'+1} \in \mathcal{M}_n(K)$.

Pour conclure, il suffit d'appliquer le point (3) du lemme précédent. □

Corollaire 2.10. *(1) Le groupe* $\mathrm{GL}_n(K)$ *est engendré par les matrices de transvection, dilatation et permutation.*

(2) Le groupe $\mathrm{SL}_n(K)$ *est engendré par les matrices de transvection.*

Démonstration. (1) découle du théorème et fait que les matrices de $\mathrm{GL}_n(K)$ sont surjectives donc de rang n.

(2) On observe que $P_{(i\ j)} = T_{i,j}(1)T_{j,i}(-1)D_i(-1)$ et que $D_i(\mu)T_{i,j}(\lambda) = T_{i,j}(\lambda\mu)D_i(\mu)$. Donc dans une écriture d'une matrice $A = A_1 \dots A_r \in \mathrm{SL}_n(K)$ où les matrices A_k sont des matrices élémentaires, on peut se ramener au cas où les A_k ne sont pas des matrices de permutations, puis au cas où $A = A_1 \cdots A_s B_1 \cdots B_t$ où les A_i sont des matrices de transvection et les B_j sont des matrices de dilatation. Donnons-nous une telle écriture avec t minimal. On doit ensuite observer le calcul suivant : $m_\lambda = T_{i,j}(\lambda)T_{j,i}(-1/\lambda)T_{i,j}(\lambda)T_{j,i}(1/\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -1/\lambda & 0 \end{pmatrix}$. On a alors $m_\lambda m_{-1} = D_i(\lambda)D_j(1/\lambda)$, ce qui permet d'écrire $B_1B_2 = \Pi B'$ où Π est un produit de matrices de transvection et B' une matrice de dilatation. Ainsi $t = 1$. Mais alors $\det A = \det B_1 = 1$, ce qui nous dit qu'en fait $B_1 = I_n$, ce qui est exclu, et donc $t = 0$. ☐

Corollaire 2.11. *(1) Le noyau est un invariant total pour l'action de* $\mathrm{GL}_n(K)$ *sur* $\mathcal{M}_n(K)$ *par multiplication à gauche.*

(2) L'image est un invariant total pour l'action de $\mathrm{GL}_n(K)$ *sur* $\mathcal{M}_n(K)$ *par multiplication par l'inverse à droite.*

(3) Le rang est un invariant total pour l'action par équivalence de $\mathrm{GL}_n(K) \times mathrmGL_n(K)$ *sur* $\mathcal{M}_n(K)$.

Démonstration. (1), (2) et (3) découlent du fait que $\mathrm{GL}_n(K)$ est engendré par les matrices élémentaires et respectivement des points (1), (2) et (3) du lemme précédent. ☐

2.2 Familles de générateurs

Soit K un corps et E un K-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Dilatations

Définition 2.12. On suppose que le corps K contient au moins 3 éléments. On appelle *dilatation* de E d'hyperplan H, de droite D et de rapport λ, un endomorphisme $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $H = \ker(u - \mathrm{id}_E)$ est un hyperplan, $D = \ker(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)$ et $\det(u) = \lambda \neq 1$.

Fait 2.13. *(1) Si* $E = H \oplus D$ *avec* H *hyperplan,* D *droite et si* $\lambda \in K \setminus \{0, 1\}$*, alors il existe une unique dilatation de* E *d'hyperplan* H*, de droite* D *et de rapport* λ.

(2) La droite D *est entièrement déterminée par* H *et* λ.

(3) Si $\lambda = -1 \neq 1$ [*]*, alors* u *est la symétrie de* E *par rapport à* H *parallèlement à* D.

(4) u *est une dilatation de rapport* λ *si, et seulement si, il existe une base* $\mathcal{B}$ *de* E *telle que*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Démonstration. (1) L'existence est claire sur une base adaptée à la décomposition $E = H \oplus D$ en posant $u(h) = h$ pour $h \in H$ et $u(d) = \lambda d$ pour $d \in D$. L'unicité se vérifie par égalité sur les sous-espaces H et D.

(2) Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $\ker(u - \mathrm{id}_E) = H$ et $\det u = \lambda \neq 1$. Soit $D' = \mathrm{im}(u - \mathrm{id}_E)$. Alors par le théorème du rang, on sait que D' est une droite de E ; de plus, on a $u(D') \subseteq D'$. Si on avait $D' \subset H$, alors on aurait $(u - \mathrm{id})^2 = 0$, donc $\mu_u | (X-1)^2$ et, en particulier, u serait trigonalisable d'unique valeur propre égale à 1. Ceci contredit $\det u \neq 1$. Donc $D' \not\subset H$. Soit $\mu \in K^*$ tel que $u_{D'} = \mu\,\mathrm{id}_{D'}$. Alors $\det u = \mu = \lambda$ et nécessairement $D' = \ker(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) = D$.

(3) On a $(u_H)^2 = \mathrm{id}_H$ et $(u_D)^2 = \mathrm{id}_D$, d'où $u^2 = \mathrm{id}_E$. Il suffit de conclure en observant que $\ker(u - \mathrm{id}_E) = H$ et $\ker(u + \mathrm{id}_E) = D$.

(4) H et D sont des sous-espaces propres de u et sont en somme directe. Donc u est diagonalisable et les multiplicités des valeurs propres sont données par les dimensions respectives de H et D. La réciproque se lit sur la matrice. ☐

[*]. ce qui impose $\mathrm{car}(K) \neq 2$

Transvections

Définition 2.14. Soit H un hyperplan de E et $u \in \mathrm{GL}(E)$. On dit que u est **une** *transvection* d'hyperplan H de E si $\ker(u - \mathrm{id}_E) = H$ et si $\det u = 1$.

On appelle *droite de la transvection* u la droite $D = \mathrm{im}(u - \mathrm{id}_E)$.

Proposition 2.15. *Soit u une transvection d'hyperplan H et de droite D. Alors :*

(1) $D \subset H$;

(2) il existe un vecteur $v \in E$ et une forme linéaire non nulle $f \in E^*$ tels que $u = \mathrm{id}_E + f(\cdot)v$;

(3) il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) Si H est un hyperplan de E et $x \notin H$, alors tout transvection de H s'étend en une transvection de E qui est l'identité sur Kx.

Démonstration. (1) On observe que D est une droite u-stable, par définition de D, et on pose $\mu \in K$ tel que $u_D = \mu \, \mathrm{id}_D$. Si on avait $\mu \neq 1$, alors D serait le sous-espace propre supplémentaire de H dans E et donc on aurait $\det(u) = \mu \neq 1$, ce qui est exclu. Donc $\mu = 1$ et $D \subset H$.

(2) En particulier, le polynôme $(X-1)^2$ annule u et c'en est en fait le polynôme minimal car u n'est pas l'identité. Soit $v \in D \setminus \{0\}$. Pour tout $x \in E$, il existe un scalaire $\mu_x \in K$ tel que $u(x) - x = \mu_x v$. Soit $f : x \mapsto \mu_x$. C'est une forme linéaire non nulle, de noyau H vérifiant l'identité souhaitée.

(3) On pose $v = e_{n-1}$ et e_n le vecteur antédual de f. On complète e_{n-1} en une base $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de H. Alors la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base car $e_n \notin H = \ker f$ et elle convient.

(4) Par définition $E = H \oplus Kx$. Soit u une transvection de H que l'on étend en un endomorphisme v de E par linéarité en posant $v(h) = h \ \forall h \in H$ et $v(x) = x$. Alors $ker(v - \mathrm{id}_E) = \ker u \oplus Kx$ est un hyperplan de E et $\det v) = \det u \det \mathrm{id}_{Kx} = 1$. Donc v est une transvection de E. □

Théorème

Théorème 2.16. *Les transvections engendre* $\mathrm{SL}(E)$*. Les dilatations et transvections engendrent le groupe* $\mathrm{GL}(E)$.

Lemme 2.17. *On suppose $n \geq 2$ et $x, y \in E \setminus \{0\}$. Il existe une ou deux transvections $u, v \in E$ telles que $u(x) = y$ ou $vu(x) = y$.*

Démonstration. Supposons que x et y ne sont pas colinéaires. Soit $z = y - x$. La famille (x, z) est libre donc il existe $f \in E^*$ telle que $f(x) = 1$ et $f(z) = 0$. Soit $u = \mathrm{id}_E + f(\cdot)z$. Alors $u(x) = x + z = y$.

Si x et y sont colinéaires, soit $z \in E \setminus Kx$, ce qui existe car $n \geq 2$. Alors il existe x, z ne sont pas colinéaires et y, z ne sont pas colinéaires, donc il existe u, v des transvections telles que $u(x) = z$ et $v(z) = y$. □

Lemme 2.18. *Soit H_1, H_2 deux hyperplans distincts de E et $x \notin H_1 \cup H_2$. Alors il existe une transvection u de E telle que $u(x) = x$ et $u(H_1) = H_2$.*

Démonstration. Soit $H = H_1 \cap H_2 + Kx$. C'est un hyperplan de E car $\dim H_1 \cap H_2 = n - 2$ comme intersection de deux hyperplans distincts et la somme $H_1 \cap H_2 + Kx$ est directe car $x \notin H_1 \cap H_2$.

Soit $z_1 \in H_1 \setminus H_1 \cap H_2$. Alors $z_1 \notin H$, donc il existe une forme linéaire $f \in E^*$ telle que $f(H) = 0$ et $f(z_1) = 1$. D'autre part, comme $x \notin H_2$, on a $E = H_2 \oplus Kx$. Donc il existe $z_2 \in H_2$ tel que $z = z_2 - z_1 \in Kx$.

La transvection $u = \mathrm{id}_E + f(\cdot)z$ convient. En effet, $u(z) = z + f(z)z = z$ car $z \in Kx \subset H$ et $z \neq 0$ car $z_1 \notin H_2$. Donc $u_{Kx} = \mathrm{id}_{Kx}$. De plus, si $y_1 \in H_1$, on écrit $y_1 = \lambda z_1 + y_2$ avec $y_2 \in H_1 \cap H_2$ et $\lambda \in K$. Alors $u(y_1) = y_1 + f(y_1)z = y_1 + \lambda z = \lambda z_1 + y_2 + \lambda z_2 - \lambda z_1 = y_2 + \lambda z_2 \in H_2$. □

Démonstration du théorème. On démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tout corps K, le groupe $\mathrm{SL}_n(K)$ est engendré par les transvections. Le résultat est évident si $n = 1$ car le groupe est trivial.

Soit $n \geq 2$ et supposons le résultat connu en dimension $n - 1$. Soit $g \in \mathrm{SL}(E)$ et $x \in E \setminus \{0\}$. Posons $y = g(x)$. Le lemme 2.17 donne l'existence d'un produit d'une ou deux transvections $w \in \mathrm{SL}(E)$ tel que $w(y) = x$. Ainsi, $wg(x) = x$ et il suffit d'écrire $h = wg$ comme produit de transvections.

Soit H_1 un supplémentaire de Kx dans E et $H_2 = h(H_1)$. Alors $x \notin H_1$ par construction et $x \notin h(H_1)$ car sinon, on aurait $h^{-1}(x) = x \in H_1$. On peut donc appliquer le lemme 2.18 pour trouver une transvection $v \in \mathrm{SL}(E)$ telle que $v(x) = x$ et $v(H_2) = H_1$.

Ainsi, l'élément $k = vh = vwg$ stabilise la décomposition $E = H_1 \oplus Kx$ et $\det(k) = \det(\mathrm{id}_{Kx}) \cdot \det(k_{H_1})$. Par hypothèse de récurrence, k s'écrit comme produit de transvections de H_1, et donc $g = w^{-1}v^{-1}k$ s'écrit comme produit de transvections de E.

Pour conclure, il suffit de voir que pour $g \in \mathrm{GL}(E)$, en posant $\lambda = \det g$ et $d \in \mathrm{GL}(E)$ une dilatation de rapport $\frac{1}{\lambda}$, on a $gd \in \mathrm{SL}(E)$ et donc g s'écrit comme le produit d'une dilatation et de transvections. □

2.3 Étude de $\mathrm{GL}(E)$ et ses sous-groupes

Résultats de conjugaison

Fait 2.19. *Soit H un hyperplan de E, soit D une droite de E, soit $\lambda \in K^*$ et $h \in \mathrm{GL}(E)$ un endomorphisme inversible.*

Si $h \in \mathrm{GL}(E)$ est une transvection (resp. dilatation) d'hyperplan H, de droite D (resp. et de rapport λ), alors ghg^{-1} est une transvection (resp. dilatation) d'hyperplan $g(H)$, de droite $g(D)$ (resp. et de rapport λ).

Démonstration. Ce résultat est laissé en exercice au lecteur. □

Proposition 2.20.
1. *Les transvections dans $\mathrm{GL}(E)$ sont deux à deux conjuguées.*
2. *Deux dilatations de $\mathrm{GL}(E)$ sont conjuguées si, et seulement si, elles ont même rapport.*
3. **Si** $\dim E \geq 3$, *alors les transvections dans $\mathrm{SL}(E)$ sont deux à deux conjuguées.*
4. *Dans $\mathrm{SL}_2(K)$, toute transvection est conjuguée à $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour un certain $\lambda \in K^*$.*
5. *Dans $\mathrm{SL}_2(K)$, les matrices $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont conjuguées si, et seulement si, le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ est un carré dans $K^\times$.*

Démonstration. Ce résultat est laissé en exercice au lecteur. □

Centre, quotient et espace projectif

Définition 2.21. On appelle *homothétie* de E un endomorphisme $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel qu'il existe $\lambda \in K^*$ tel que $u = \lambda \, \mathrm{id}_E$.

Fait 2.22. *L'ensemble des homothéties est un sous-groupe, noté $K^\times \mathrm{id}_E$ de $\mathrm{GL}(E)$ isomorphe à K^*.*

Définition 2.23. Soit E un K-espace vectoriel. On appelle *espace projectif* sur E, noté $\mathbb{P}(E)$ l'ensemble des droites vectorielles de E.

Le groupe $\mathrm{GL}(E)$ agit naturellement sur $\mathbb{P}(E)$, de même que ses sous-groupes et, en particulier le groupe $\mathrm{SL}(E)$.

Lemme 2.24. *Le centre de l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur $\mathbb{P}(E)$ est le groupe des homothéties.*

Démonstration. On considère un élément $u \in \mathrm{GL}(E)$ dans le centre de cette action, de sorte que $u(Kx) = Kx$. Ceci définit donc des scalaires λ_x tels que $u(x) = \lambda_x x$.

Soient $x, y \in E \setminus \{0\}$. Si x et y sont colinéaires avec $y = \mu x$, alors $u(y) = u(\mu x) = \mu u(x)$ donc $\lambda_y = \lambda_x$ car $x \neq 0$. Si x et y ne sont pas colinéaires, alors (x, y) libre donc $u(x+y) = u(x) + u(y)$ donne $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$. Ainsi, l'application $\lambda : E \setminus \{0\} \to K^*$ vérifiant $\lambda(x) = \lambda_x$ est constante. □

Théorème 2.25. *On a $\mathcal{Z}(\mathrm{GL}(E)) = K^\times \mathrm{id}_E$ et $\mathcal{Z}(\mathrm{SL}(E)) = \mu_n(K) \, \mathrm{id}_E$.*

Démonstration. Les homothéties sont dans le centre de $\mathrm{GL}(E)$. Réciproquement, si un élément $u \in \mathrm{GL}(E)$ (resp. $u \in \mathrm{SL}(E)$) est dans le centre du groupe, alors son action par conjugaison sur les transvections préserve les droites associées au transvection. Donc u est dans le centre de l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur $\mathbb{P}(E)$. □

Définition 2.26. On appelle *groupe projectif linéaire* le groupe quotient $\mathrm{PGL}(E) = \mathrm{GL}(E)/\mathcal{Z}(\mathrm{GL}(E))$. On appelle *groupe projectif spécial linéaire* le groupe quotient $\mathrm{PSL}(E) = \mathrm{SL}(E)/\mathcal{Z}(\mathrm{SL}(E))$.

Fait 2.27. *Les groupes projectifs et projectifs spéciaux agissent fidèlement et transitivement sur l'espace projectif* $\mathbb{P}(E)$.

De plus, si $n = 2$*, alors l'action de ces groupes sur l'espace projectif est exactement* 3*-transitive.*

Remarque 2.28. En général, il faudra travailler davantage pour définir la notion de repère projectif : ce sont les familles de points $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{P}(E)$ tels qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $p_i = Ke_i$ et $p_0 = K(e_1 + \cdots + e_n)$.

L'action de $\mathrm{PGL}(E)$ sera alors transitive sur les repères projectifs de $\mathbb{P}(E)$.

On peut alors définir le birapport de quatre points (a, b, c, d) de $\mathbb{P}_1(K) = \mathbb{P}(K^2)$ comme l'unique $\delta \in K \cup \{\infty\} = \mathbb{P}_1(K)$ tel que (a, b, c, d) est dans l'orbite de $(0 = [1 : 0], 1 = [1 : 1], \infty = [0 : 1], \delta)$ sous l'action de $\mathbb{PGL}_2(K)$ sur $\mathbb{P}_1(K)^4$.

Il est plus délicat de généraliser cette notion en dimension supérieur car quatre droites distinctes en position quelconque ne forment plus nécessairement un repère projectif de $\mathbb{P}_2(K) = \mathbb{P}(K^3)$.

Groupe dérivé et simplicité

Théorème 2.29. *On a les égalités suivantes :*

1. *Si* $n \geq 3$ *ou* $\mathrm{Card}K \geq 3$*, alors* $\mathcal{D}(\mathrm{GL}_n(K)) = \mathrm{SL}_n(K)$.
2. *Si* $n \geq 3$ *ou* $\mathrm{Card}K \geq 4$*, alors* $\mathcal{D}(\mathrm{SL}_n(K)) = \mathrm{SL}_n(K)$ *(on dit que le groupe est parfait).*
3. *Si* $n \geq 3$ *ou* $\mathrm{Card}K \geq 4$*, alors* $\mathrm{PSL}_n(K)$ *est simple.*

Démonstration. Ces différents résultats qui peuvent faire l'objet de développement sont proposés en exercices. □

2.4 Un peu de topologie

Dans cette dernière partie, on se restreint au cas plus spécifique du corps $K = \mathbb{R}$. La topologie de $\mathbb{R}$ fait de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, de ses sous-groupes et de ses quotients des espaces topologiques car $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est une partie (ouverte) du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 2.30. *L'ensemble des matrices de transvection est étoilé par rapport à l'identité. Le groupe* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ *est connexe par arcs.*

Démonstration. Toute transvection est naturellement connectée par un arc formé de matrices de transvections à l'identité via la formule $t \mapsto u_t = \mathrm{id}_E + f(\cdot)tz$.

Le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est engendré par les transvections, et un produit de transvection reste dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. □

Proposition 2.31. *Le groupe* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *est connexe par arcs.*

Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *admet deux composantes connexes par arcs qui sont* $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$*. De plus,* $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ *est la composante neutre de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *et, en particulier, c'est un sous-groupe distingué.*

Démonstration. La décomposition polaire des nombres complexes permet de ramener toute matrice de dilatation complexe à la matrice identité.

Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe comme l'indique l'image du morphisme continu induit par le déterminant. Le groupe $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs car il est engendré par des matrices de dilatation et de transvection et toute matrice de dilatation réelle de paramètre positif peut être reliée par un arc à l'identité.

L'ensemble $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ est l'image de $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ par l'application continue de multiplication par une matrice de dilatation de paramètre -1. On a donc écrit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ comme réunion disjointe de deux parties connexes. Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe, c'en sont ses composantes connexes. □

Remarque 2.32. Pour les plus farouches d'entre vous, vous pouvez envisager également des résultats de compacité ou une approche élémentaire des groupes de Lie réels via l'exponentielle matricielle.

Je n'ai volontairement pas parlé des sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$ associés aux formes quadratiques car une étude plus approfondie des formes quadratiques est préalablement nécessaire à leur étude.