ÉNS de Lyon
M2 FEADEP

Cours d'algèbre
2018-2019

L'anneau des séries formelles

Leçons concernées (2019)

(122) Anneaux principaux. Applications.
(190) Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Leçons en lien, via des développements (2019)

(125) Extensions de corps. Exemples et applications.
(144) Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.
(156) Exponentielle de matrices. Applications.
(243) Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.
(264) Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Bibliographie

- À suivre...

L'enjeu de ce cours est de dégager une définition de l'ensemble des séries formelles, de le munir d'une structure d'anneau et d'en étudier les propriétés algébriques. On pourra également utiliser les séries formelles à coefficients entiers comme outil de combinatoire ou de dénombrement.

1 Définition, valuation et premières propriétés

Soit A un anneau (unitaire) commutatif.

Définition 1.1. On définit l'*anneau des séries formelles* à coefficients dans A comme l'ensemble des suites indexées par $\mathbb{N}$ d'éléments de A que l'on munit de deux lois de composition internes :

$$(a_n)_n + (b_n)_n = (a_n + b_n)_n \qquad \text{et} \qquad (a_n)_n \times (b_n)_n = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \right)_n$$

Fait 1.2. *Ceci définit bien une structure d'anneau commutatif sur $A^{\mathbb{N}}$ dont l'élément unité est $(1, 0, \dots, 0, \dots)$.*

Notation 1.3. Pour distinguer l'anneau des séries formelles de l'anneau produit sur $\mathbb{N}$ de copies de A, on le notera $A[[T]]$ et on notera $\sum a_n T^n$ au lieu de $(a_n)_n$. En particulier, en notant $T = (0, 1, 0, \dots)$, on a également $T^n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ termes}}, 1, 0 \dots)$.

Par convention, on notera $A[[X,Y]] = A[[X]][[Y]]$ l'anneau des séries formelles dont les coefficients sont eux-mêmes des séries formelles à coefficients dans A.

Fait 1.4. *Les éléments de $A[[X,Y]]$ s'écrivent de manière unique sous la forme $\sum a_{m,n} X^m Y^n$.*

Exemple 1.5 (Exemples fondamentaux). Il est clair que $\sum X^n \in A[[X]]$ quel que soit l'anneau unitaire A par définition et on a toujours :

$$\left(\sum X^n \right) (1 - X) = 1.$$

Autrement dit, $1 - X$ est inversible dans $A[[X]]$ et on note $\frac{1}{1-X} = \sum X^n$ son inverse.

Si $A = K$ est un corps de caractéristique 0, alors on définit également deux séries formelles à coefficients dans K par :

$$\exp(X) = \sum \frac{1}{n!} X^n \qquad \text{et} \qquad \log(1 + X) = \sum \frac{(-1)^n}{n+1} X^{n+1}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'idéal principal $T^k A[[T]]$ engendré par T^k est l'ensemble des séries formelles $\sum a_n T^n$ telles que $a_n = 0$ pour tout $n < k$.

Définition 1.6 (Valuation)**.** On définit sur $A[[T]]$ une application $\nu : A[[T]] \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ par $\nu(f) = \sup \left\{ k \in \mathbb{N},\ f \in T^k A[[T]] \right\}$.

Fait 1.7. *Soient $f, g \in A[[T]]$. On a*

(1) $\nu \left(\sum a_n T^n \right) = \inf\{n \in \mathbb{N},\ a_n \neq 0\}$ *;*

(2) $\nu(f) = \infty \iff f = 0$ *;*

(3) $\nu(f + g) \geq \min \left(\nu(f), \nu(g) \right)$ *avec égalité si* $\nu(f) \neq \nu(g)$ *;*

(4) $\nu(fg) \geq \nu(f) + \nu(g)$ *avec égalité si A est intègre.*

Démonstration. Ces résultats élémentaires sont laissés en exercice au lecteur. □

Exercice 1. Montrer que si A est intègre, alors $A[[T]]$ est intègre.

2 Topologie de l'anneau des séries formelles

Définition 2.1. Soit $c \in]1, +\infty[$ un réel, typiquement $c = e$ ou $c = 2$. On définit une norme ultramétrique sur $A[[T]]$ par

$$\|f\| = c^{-\nu(f)}$$

Proposition 2.2.

1. *On a*
   (a) $\|a\| = 1$ *pour tout* $a \in A \setminus \{0\}$ *;*
   (b) $\|fg\| \leq \|f\|\|g\|$ *avec égalité si* $f \in A$ *ou si* A *est intègre ;*
   (c) $\|f + g\| \leq \max(\|f\|, \|g\|) \leq \|f\| + \|g\|$.

   On dit que $\|\cdot\|$ *est* une norme ultramétrique.
2. *La fonction* $d(f, g) = \|g - f\|$ *munit* $A[[T]]$ *d'une structure d'espace métrique et la topologie ainsi définie sur* $A[[T]]$ *ne dépend pas de la constante* $c \in]1, +\infty[$.

Démonstration. Ceci est laissé en exercice au lecteur. □

Proposition 2.3. *Le sous-anneau* $A[T] = \{\sum a_n T^n,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ a_n = 0\}$ *de* $A[[T]]$*, isomorphe à l'anneau des polynômes à coefficients dans* A*, est dense dans* $A[[T]]$.

Démonstration. L'isomorphisme découle de la propriété universelle des algèbres de polynômes les lois d'anneau étant les mêmes. Soit $f = \sum a_k T^k \in A[[T]]$. En posant $f_n = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k$, on observe que $\nu(f - f_n) \geq n + 1$. Ainsi la suite f_n converge vers f. □

Théorème 2.4. *L'espace métrique* $(A[[T]], d)$ *est complet.*

Démonstration. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $A[[T]]$. On écrit $f_n = \sum a_{n,k} T^k$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Comme f_n est de Cauchy, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $m, n > N_0$, on a $\nu(f_m - f_n) \geq N$. Or $f_m - f_n = \sum (a_{m,k} - a_{n,k}) T^k$. Donc pour tout $k < N$, on a $a_{m,k} = a_{n,k}$. Ainsi, les suites $(a_{n,k})_n$ d'élément de A sont toutes stationnaires. En notant $a_k = \lim\limits_{n \to \infty} a_{n,k}$ et $f = \sum a_k T^k$, on en déduit que pour $n \geq N_0$, on a $\nu(f_n - f) \geq N$. Donc la suite f_n converge vers $f \in A[[T]]$. □

Théorème 2.5. *Une suite* f_n *d'éléments de* $A[[T]]$ *converge si, et seulement si, la suite* $(f_n - f_{n-1})$ *converge vers* 0.

Démonstration. Supposons que $(f_n - f_{n-1})$ converge vers 0. On veut montrer que la suite $(f_n)_n$ est de Cauchy. Soit $N \in \mathbb{N}$ et N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$, on ait $\nu(f_n - f_{n-1}) \geq N$, ce qui existe car $(f_n - f_{n-1})$ converge vers 0. Soit $N_0 \leq m < n$. Alors

$$\begin{aligned}
\nu(f_n - f_m) &= \nu(f_n - f_{n-1} + f_{n-1} - \cdots + f_{m+1} - f_m) \\
&\geq \min\{\nu(f_n - f_{n-1}), \ldots, \nu(f_{m+1} - f_m)\} \\
&\geq N
\end{aligned}$$

Ainsi f_n est de Cauchy donc converge. La réciproque est vraie dans tout espace métrique. □

Corollaire 2.6. *Soit* $(f_n)_n$ *une suite d'éléments de* $A[[T]]$*. S'équivalent :*

(i) *la série de terme général* f_n *converge dans* $A[[T]]$ *;*
(ii) *la suite* $(f_n)_n$ *converge vers* 0 *;*
(iii) $\lim\limits_{n \to \infty} \nu(f_n) = +\infty$.

On pourra également observer que l'addition et la multiplication sont des opérations continues. On dit alors que $A[[T]]$ est un anneau topologique.

3 Composition

Remarque 3.1. On ne saurait donner un sens à $e^{1+T} = \exp \circ (1+T)$ bien que les séries formelles $\exp = \sum \frac{1}{n!} T^n$ et $1+T$ aient un sens dans $\mathbb{Q}[[T]]$.

Attention : bien que $\sum \frac{1}{n!} = e^1$ ait un sens dans $\mathbb{R}$, ce n'est pas le cas dans un anneau quelconque. Par exemple, on ne saurait y donner un sens dans $\mathbb{Q}$.

Soit $g \in TA[[T]]$ et $f = \sum a_n T^n \in A[[T]]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\nu(a_n g^n) \geq n\nu(g) \geq n$. Donc la série de terme général $a_n g^n$ converge. On note $\sum a_n g^n$ sa limite.

Définition 3.2. Pour $f, g \in A[[T]]$ avec $f = \sum a_n T^n$ et $\nu(g) \geq 1$, on pose

$$f \circ g = \sum a_n g^n = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} a_n g^n$$

Fait 3.3. *Si $f = \sum a_n T^n$ et $g = \sum b_n T^n$ avec $b_0 = 0$, alors on a $f \circ g = \sum c_n T^n$ où*

$$c_n = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ j_1 + \cdots + j_k = n \\ j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{N}^*}} a_k b_{j_1} \cdots b_{j_k}$$

Proposition 3.4. *Soient $f_1, f_2, g \in A[[T]]$ avec $\nu(g) \geq 1$. On a*

$$(f_1 + f_2) \circ g = f_1 \circ g + f_2 \circ g \qquad \textit{et} \qquad (f_1 \times f_2) \circ g = (f_1 \circ g) \times (f_2 \circ g)$$

Démonstration. Écrivons $f_1 = \sum a_n^{(1)} T^n$, $f_2 = \sum a_n^{(2)} T^n$, $g = \sum b_n T^n$. D'une part, on a $(f_1 + f_2) \circ g = \sum \alpha_n T^n$ avec

$$\alpha_n = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ j_1 + \cdots + j_k = n \\ j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{N}^*}} \left(a_k^{(1)} + a_k^{(2)}\right) b_{j_1} \cdots b_{j_k}.$$

D'autre part, on a $f_i \circ g = \sum \beta_n^{(1)} T^n$ avec

$$\beta_n^{(i)} = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ j_1 + \cdots + j_k = n \\ j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{N}^*}} a_k^{(i)} b_{j_1} \cdots b_{j_k}.$$

Ainsi $(f_1 \circ g) + (f_2 \circ g) = \sum \beta_n^{(1)} T^n + \sum \beta_n^{(2)} T^n = \sum \alpha_n T^n$.

On procède par un calcul analogue pour le produit en écrivant $f_1 \times f_2 = \sum c_n T^n$ avec

$$c_n = \sum_{n_1 + n_2 = n} a_{n_1}^{(1)} a_{n_2}^{(2)}.$$

On a alors $(f_1 \circ g) \times (f_2 \circ g) = \sum d_n T^n$ avec

$$\begin{aligned} d_n &= \sum_{n_1 + n_2 = n} \left(\sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ j_1 + \cdots + j_k = n_1 \\ j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{N}^*}} a_{n_1}^{(1)} b_{j_1} \cdots b_{j_k} \right) \cdot \left(\sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ j_1 + \cdots + j_k = n_2 \\ j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{N}^*}} a_{n_2}^{(2)} b_{j_1} \cdots b_{j_k} \right) \\ &= \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ j_1 + \cdots + j_k = n \\ j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{N}^*}} \left(\sum_{k_1 + k_2 = k} a_{k_1}^{(1)} a_{k_2}^{(2)} \right) b_{j_1} \ldots b_{j_2} \\ &= \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ j_1 + \cdots + j_k = n \\ j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{N}^*}} c_k b_{j_1} \ldots b_{j_2} \end{aligned}$$

D'où $(f_1 \circ g) \times (f_2 \circ g) = (f_1 \times f_2) \circ g$. □

Théorème 3.5. *Soit $g = \sum b_n T^n \in TA[[T]]$, c'est-à-dire $b_0 = 0$. L'application*

$$\begin{array}{ccc} A[[T]] & \to & A[[T]] \\ f & \mapsto & f \circ g \end{array}$$

est un endomorphisme de A-algèbre continu.

De plus, c'est un isomorphisme si, et seulement si, $b_1 \in A^\times$ est inversible. Donc, en particulier, $\nu(g) = 1$.

Démonstration. Le fait qu'il s'agisse d'un endomorphisme découle de la proposition précédente. On montre que cet endomorphisme est 1-lipschitzien.

$$\nu\left(f_1 \circ g - f_2 \circ g\right) = \nu\left(\left(f_1 - f_2\right) \circ g\right) \geq \nu\left(f_1 - f_2\right).$$

D'où $\|f_1 \circ g - f_2 \circ g\| \leq \|f_1 - f_2\|$.

On cherche donc à savoir quand est-ce que la composition par g est inversible.

Si $f \mapsto f \circ g$ est inversible, alors, en particulier, il existe $f = \sum a_n T^n \in A[[T]]$ tel que $f \circ g = T$. Donc $T = \sum a_n g^n$. Par unicité de l'écriture $0 = a_0$, donc $\nu(f) \geq 1$. Comme $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n g^{n-1} = h$ existe, par unicité, on a $T = gh$ et donc

$$1 = \nu(T) = \nu(gh) \geq \nu(g) + \nu(h) \geq \nu(g) \geq 1$$

D'où $\nu(g) = 1$ et donc $b_1 \neq 0$. De plus, par unicité de l'écriture, l'égalité $T = a_1 b_1 T + a_1 \sum_{n\geq 2} b_n T^n + \sum_{n\geq 2} a_n g^n$ donne $1 = a_1 b_1$ donc $b_1 \in A^\times$.

Inversement, supposons que $b_1 \in A^\times$ d'inverse $b_1^{-1} = a_1$, et donc en particulier que $\nu(g) = 1$. Il suffit de trouver f telle que $f \circ g = T$. En effet, dans ce cas, pour tout $h \in A[[T]]$, on aura alors

$$h = h \circ T = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g.$$

Cherchons plutôt f telle que $g \circ f = T$.

$$\begin{aligned} g \circ f = T &\Leftrightarrow \sum b_n f^n = T \\ &\Leftrightarrow f = b_1^{-1} T - \sum_{n\geq 2} \frac{b_n}{b_1} f^n \\ &\Leftrightarrow f = \Phi(f) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & TA[[T]] & \to & TA[[T]] \\ & f & \mapsto & \dfrac{1}{b_1} T - \sum_{n\geq 2} \dfrac{b_n}{b_1} f^n \end{array}.$$

Montrons que Φ est contractante. On a

$$\begin{aligned} \nu\left(\Phi(f_1) - \Phi(f_2)\right) &= \nu\left(\frac{b_2}{b_1}\left(f_2^2 - f_1^2\right) + \frac{b_3}{b_1}\left(f_2^3 - f_1^3\right) + \dots\right) \\ &\geq \inf_{k\geq 2} \nu\left(f_2^n - f_1^n\right) \\ &\geq \nu(f_2 - f_1) + 1 \\ d\left(\Phi(f_1), \Phi(f_2)\right) &\leq c^{-1} d(f_1, f_2) \end{aligned}$$

Donc Φ est $\frac{1}{c}$-lipschitzienne donc contractante. Ainsi Φ a un unique point fixe $f = \sum a_n T^n \in TA[[T]]$ et $g \circ f = T$. Comme $\nu(f) = 1$ et $a_1 \in A^\times$, on peut réappliquer ce raisonnement avec f au lieu de g pour trouver $h \in TA[[T]]$ telle que $f \circ h = T$. Ainsi

$$g = g \circ T = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = T \circ h = h$$

D'où $f \circ g = f \circ h = T = g \circ f$. □

4 Compléments sur les propriétés d'anneau

Corollaire 4.1. *On a* $A[[T]]^\times = \{f = \sum a_n T^n \in A[[T]],\ a_0 \in A^\times\}$.

Démonstration. L'inclusion $\subset$ est immédiate. Montrons $\supset$. Soit $f = \sum a_n T^n$ avec $a_0 \in A^\times$. Soit $g = f - a_0 \in TA[[T]]$. Alors, si cela a un sens, on a

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a_0 + g} = \frac{1}{a_0\left(1 + \frac{g}{a_0}\right)} = \frac{1}{a_0}(1-T)\circ\left(-a_0^{-1}g\right) = a_0^{-1}\sum\left(-a_0^{-1}g\right)^n \in A[[T]]$$

$\square$

Exercice 2. Montrer que $\lim\limits_{k\to\infty}\prod\limits_{n=0}^{k}\left(1+T^{2^n}\right) = \sum T^n = \dfrac{1}{1-T}$.

Lorsque K est un corps

Si $A = K$ est un corps, alors pour tout $f \in K[[T]] \setminus \{0\}$, il existe un unique $g \in K[[T]]^\times$ tel que $f = T^{\nu(f)}g$. En particulier

Proposition 4.2. $\forall f, g \in K[[T]], \qquad f|g \quad$ *ou* $\quad g|f$.

Corollaire 4.3. *L'anneau* $K[[T]]$ *est euclidien, donc principal.*
Les idéaux de $K[[T]]$ *sont* (0) *et les* $(T^k) = T^k K[[T]]$ *pour* $k \in \mathbb{N}$.
Les idéaux premiers de $K[[T]]$ *sont* (0) *et* (T).
L'idéal (T) *est l'unique idéal maximal de* $K[[T]]$. *On dit que* $K[[T]]$ *est un anneau local.*

Permanence ou non des propriétés d'anneau

Proposition 4.4. *Si* A *est noethérien, alors* $A[[T]]$ *est noethérien.*

Esquisse de preuve.

Première étape : On montre d'abord que si J est un idéal de $A[[T]]$, alors l'ensemble des premiers coefficients non nuls d'éléments de J vus dans $A[[T]]$:

$$\mathcal{I}(J) = \left\{a_k \in A, \quad \sum_{n\geq k} a_n T^n \in J \text{ et } k \in \mathbb{N}\right\}$$

est un idéal de A.

Deuxième étape : On montre que si $J_1 \subset J_2$ sont deux idéaux de $A[[T]]$ tels que $\mathcal{I}(J_1) = \mathcal{I}(J_2)$ et $\min\{\nu(x),\ x \in J_1\} = \min\{\nu(x),\ x \in J_2\}$, alors $J_1 = J_2$.

Troisième étape : On considère enfin une chaîne ascendante d'idéaux $J_0 \subseteq J_1 \subseteq \cdots$ de $A[[T]]$. La suite d'idéaux $I_0 = \mathcal{I}(J_0), I_1 = \mathcal{I}(J_1), \ldots$ correspondante dans A est alors également croissante. Comme A est supposé noethérien, la suite (I_n) stationne à partir d'un certain rang N_1 Comme toute suite d'entiers naturels décroissante stationne, on a que la suite $\min\{\nu(x),\ x \in J_n\}$ stationne à partir d'un certain rang N_2. Donc la suite (J_n) stationne à partir du rang $\max(N_1, N_2)$. $\square$

Remarque 4.5. Les propriétés de factorialité sont plus délicates.

On trouve dans le livre de Samuel *Lectures on unique factorization domain* un exemple d'anneau $A = R_{(X,Y,Z)}$ localisé de $R = K[X,Y,Z]/(X^2+Y^3+Z^7)$, donc local (et donc factoriel) mais tel que $A[[T]]$ n'est pas factoriel.

On peut aussi observer que si A est principal alors $A[[T]]$ est factoriel, mais pas principal en général.

En résumé

$$\begin{tikzcd}
A \text{ principal} \arrow[r, Rightarrow, "/" marking] \arrow[dr, Rightarrow] & A[[T]] \text{ principal} \\
A \text{ factoriel} \arrow[r, Rightarrow, "/" marking] & A[[T]] \text{ factoriel}
\end{tikzcd}$$

Corps des séries formelles de Laurent

Définition 4.6. Si $A = K$ est un corps, on note

$$K((T)) = \mathrm{Frac}\,(K[[T]])\,.$$

Fait 4.7. *Les éléments de $K((T))$ s'écrivent de manière unique sous la forme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_nT^n$ avec $\{n < 0,\ a_n \neq 0\}$ fini. Autrement dit,*

$$K((T)) = \left\{ \sum_{n\geq -n_0} a_nT^n,\ n_0 \in \mathbb{N} \textit{ et } a_n \in K \right\}.$$

Remarque 4.8. Si A est intègre, on a aussi $\mathrm{Frac}\,(A[[T]]) \subset \mathrm{Frac}(A)((T))$ mais l'inclusion est stricte en général, comme on va le voir par la suite.

Le corps $K((T))$ est le localisé en T de l'anneau local $K[[T]]$. Autrement dit, on a $K((T)) = K[[T]][\frac{1}{T}]$.

Difficultés pour les séries formelles de Laurent en plusieurs indéterminées

Supposons ici que K est un corps et que $A = K[[X]]$. Posons $L = \mathrm{Frac}(A)$ et $B = A[[Y]] = K[[X,Y]]$. On peut alors définir deux corps

$$K((X))((Y)) := \mathrm{Frac}\,\big(L[[Y]]\big) = \mathrm{Frac}\,\big(K((X))[[Y]]\big) \qquad \text{et} \qquad K((X,Y)) := \mathrm{Frac}\,\big(B\big) = \mathrm{Frac}\,\big(K[[X,Y]]\big)$$

Comme $K[[X,Y]] = K[[X]][[Y]] \subset K((X))[[Y]]$, on a naturellement l'inclusion

$$K((X,Y)) \subset K((X))((Y)).$$

Cependant, cette inclusion est stricte en général mais ce n'est pas immédiat de le voir.

Exemple 4.9. Considérons $f = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{X^n}Y^n \in K((X))[[Y]]$. On a en fait $f = \dfrac{1}{1-\frac{Y}{X}} \in K((X))((Y))$ donc $f = \frac{X}{X-Y} \in K((X,Y))$.

Cet exemple montre par la même occasion que l'ordre des variables a une importance cruciale car on n'a jamais d'inclusion entre $K((X))((Y))$ et $K((Y))((X))$ et qu'il est très important de préciser l'anneau ou le corps dans lequel on travaille. En effet, dans $K((X))((Y))$, on a $\frac{1}{X-Y} = \frac{f}{X} = \sum \frac{1}{X^{n+1}}Y^n$ alors que dans $K((Y))((X))$, on a $\frac{f}{X} = \frac{1}{X-Y} = \frac{-1}{Y-X} = \frac{-1}{Y}\frac{Y}{Y-X} = \sum_{n\geq 0} \frac{-1}{Y^{n+1}}X^n$.

Proposition 4.10. *On a $K((X,Y)) \subsetneq K((X))((Y))$.*

Démonstration. Soit $h \in K((X,Y)) \subset K((X))((Y))$ qu'on écrit $h = \frac{f}{Y^dg}$ avec $f = \sum a_n(X)Y^n$, $g = \sum b_n(X)Y^n \in K[[X]][[Y]]$ et $d \in \mathbb{N}$ choisi de telle sorte que $b_0 \neq 0$. Dans $K((X))[[Y]]$, on a alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g} &= \frac{1}{b_0}\cdot\frac{b_0}{b_0+\displaystyle\sum_{n\geq 1} b_nY^n}\\
&= \frac{1}{b_0}\cdot\frac{1}{1-\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(-\frac{b_n}{b_0}\right)Y^n}\\
&= \frac{1}{b_0}\cdot\sum_{m\geq 0}\left(\sum_{n\geq 1}\left(-\frac{b_n}{b_0}\right)Y^n\right)^m\\
&= \frac{1}{b_0}\cdot\left(1+\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{\substack{1\leq m\leq n\\ k_1+\cdots+k_m=n\\ k_1,\ldots,k_m\in\mathbb{N}^*}}(-1)^m\frac{b_{k_1}\cdots b_{k_m}}{b_0^m}\right)Y^n\right)
\end{aligned}$$

On écrit $\frac{1}{g} = \sum_{n\geq 0}\beta_nY^n$ avec $\beta \in K((X))$. On a ainsi $\nu(\beta_n) \geq -n\nu(b_0)$. Par suite, on a $h = \frac{f}{Y^dg} = \sum_{n\geq 0}\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\beta_k\right)}_{:=\alpha_{n-d}}Y^{n-d}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\nu(\alpha_n) &= \nu\left(\sum_{k=0}^{n+d} a_{n+d-k}\beta_k\right)\\ &\geq \min\left(a_{n-k}\beta_k\right)\\ &\geq -(n+d)\nu\left(b_0\right)\end{aligned}$$

Par contraposition, on en déduit alors que

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{X^{n!}} Y^n \in K((X))[[Y]] \setminus K((X,Y)).$$

□

Exercice 3. Montrer que $K(X)(Y) = K(X,Y) = K(Y)(X)$.

Remarque 4.11. En utilisant des outils qui dépassent largement le cadre de l'agrégation, on pourrait également montrer que les corps $K = \mathbb{C}((X,Y))$ et $L = \mathbb{C}((X))((Y))$ ne sont pas isomorphes car $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{C}) \simeq \widehat{\mathbb{Z}}^2$ est abélien alors que $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{C})$ n'est pas abélien puisque K est un corps hilbertien.

5 Dérivation

Définition 5.1. Si $f = \sum a_n T^n \in A[[T]]$, on pose $f' = \sum a_{n+1}(n+1)T^n \in A[[T]]$.

Proposition 5.2. *L'application* $\begin{array}{ccc} A[[T]] & \to & A[[T]] \\ f & \mapsto & f' \end{array}$ *est continue et on a*

$$(fg)' = f'g + fg' \qquad \textit{et} \qquad (f\circ g)' = (f'\circ g)g'$$

Démonstration. Les démonstrations usuelles s'adaptent et son laissées au lecteur. □

Exemple 5.3. $\exp' = \exp$ et $\log(1+T)' = \frac{1}{1+T}$.

En effet, il suffit de le vérifier sur la définition :

$$\log(1+T)' = \left(\sum \frac{(-1)^n}{n+1} T^{n+1}\right)' = \sum (n+1)\frac{(-1)^n}{n+1} T^n = \sum (-T)^n = \frac{1}{1-(-T)}$$

On a $e^{\log(1+T)} = 1 + T$.

En effet,

$$\left(\frac{e^{\log(1+T)}}{1+T}\right)' = e^{\log(1+T)} \times \frac{-1}{(1+T)^2} + \frac{1}{1+T} \times \left(e^{\log(1+T)} \times \frac{1}{1+T}\right) = 0$$

Ainsi $e^{\log(1+T)} = \lambda(1+T)$ avec $\lambda \in K$. Or $1 = \lambda$ est le coefficient de T^0.

De même, on montre que $\log\big(1 + (e^T - 1)\big) = T$.

Application à l'exponentielle de matrices

Soit B une A-algèbre et $b \in B$ un élément nilpotent. On dispose d'un morphisme d'anneaux :

$$\begin{array}{ccc} A[[T]] & \to & B \\ f = \sum a_n T^n & \mapsto & \sum a_n b^n \end{array}$$

En effet, ceci est bien défini car la somme de droite est finie lorsque b est nilpotent. En particulier, les égalités formelles donneront lieu à des égalités dans B.

Supposons que K est un corps de caractéristique $\mathrm{car}(K) = 0$. L'exponentielle ne matrice n'est pas nécessairement définie sur K, faute de complétude. En effet, que pensez-vous de $\exp(I_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$? Néanmoins, si $N \in \mathcal{M}_n(K)$ est une matrice nilpotente, alors on dispose de $\exp(N) \in K[N] \subset \mathcal{M}_n(K)$ donnée par l'évaluation de la série formelle exp.

On note également $\log\left(I_n + N\right) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} N^k \in K[N]$ qui est une matrice nilpotente. On a alors automatiquement $\exp\left(\log(1+N)\right) = I_n + N$ et $\log\left(\exp(N)\right) = N$. En particulier, l'exponentielle de matrices réalise une bijection de l'ensemble des matrices nilpotentes vers l'ensemble des matrices unipotentes.

6 Séries formelles et suites à récurrence linéaire

Lemme 6.1. *Soit $A = K$ un corps et $\alpha \in K^*$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Alors $\frac{1}{(1-\alpha T)^m} = \sum \alpha^n \binom{n+m-1}{n} T^n \in K[[T]]$.*

Démonstration. Soit $f = \frac{1}{1-\alpha T} = \left(\frac{1}{1-T}\right) \circ (\alpha T) = \sum \alpha^n T^n$. Dérivons f k-fois. On obtient

$$f^{(k)} = \frac{(-\alpha)^k (-1)^k k!}{(1-\alpha T)^{k+1}} = \frac{a^k k!}{(1-\alpha T)^{k+1}}$$

d'après les formules usuelles sur la dérivation (récurrence immédiate).

Prenons alors $k = m-1$, ce qui donne

$$f^{(m-1)} = \frac{\alpha^{m-1}(m-1)!}{(1-\alpha T)^m}$$

mais également

$$f^{(m-1)} = \sum_{n \geq m-1} \alpha^n \frac{n!}{(n-m+1)!} T^{n-m+1}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-\alpha T)^m} &= \sum_{n \geq m-1} \frac{\alpha^n}{\alpha^{m-1}} \frac{n!}{(n-m+1)!(m-1)!} T^{n-m+1} \\ &= \sum_{n \geq 0} \alpha^n \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!} T^n \\ &= \sum \alpha^n \binom{n+m-1}{n} T^n \end{aligned}$$

□

Proposition 6.2. *Soit $A = K$ un corps et $f \in K[[T]]$. S'équivalent :*

(i) $f \in K(T)$;

(ii) $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_d \in K,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_0,\ a_{n+d} + \alpha_1 a_{n+d-1} + \cdots + \alpha_d a_n = 0.$

Démonstration. Ceci est un exercice de réécriture, laissé au lecteur. □

Théorème 6.3. *Si $f = \sum a_n T^n \in K(T) \cap K[[T]]$, alors il existe une extension de corps L/K, des éléments $(z_i)_{1 \leq i \leq s} \in L$ et des polynômes $Q_j \in L[T]$ tels que pour n assez grand, on ait :*

$$a_n = \sum_{x_1 + \cdots + x_s = n} Q_{x_1, \ldots, x_s}(n) \prod_{i=1}^{s} z_i^{x_i}$$

Démonstration. On écrit $f = \frac{P}{Q}$ avec $P, Q \in K[T]$ premiers entre eux et on pose $L = \mathrm{Dec}_K(Q)$. Ainsi, Q s'écrit $Q = \prod_{i=1}^{s} (T - z_i)^{m_i}$ avec les $z_i \in L$ deux à deux premiers entre eux et $m_i \in \mathbb{N}^*$. Comme $f \in K[[T]]$, on a $v_T(Q) = 0$ donc $Q(0) \neq 0$. Ainsi

$$f = \frac{P}{Q(0) \prod_{i=1}^{s} \left(1 - \frac{T}{z_i}\right)^{m_i}}$$

. Par le lemme, on a

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{T}{z_i}\right)^{m_i}} = \sum \underbrace{\binom{n+m_i-1}{m_i-1}}_{\text{C'est un polynôme en } n} \frac{1}{z_i^n} T^n$$

. D'où le résultat. □

Exemple 6.4. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ premiers entre eux. Soit $p(n) = \mathrm{Card}\,\{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{N}^m,\ \sum \alpha_i x_i = n\}$. Alors $p(n)$ est le coefficient en T^n de la série formelle

$$\prod_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{1 - T^{\alpha_i}} \right) = \sum p(n) T^n$$

Par exemple, calculer le nombre de manières différentes d'obtenir un score au rugby, ou de rendre la monnaie en pièces de 1, 2 et 5 centimes se dénombre de la sorte.

Exercice 4. Déterminer un équivalent en $n \to \infty$ de $p(n)$ en fonction des α_i.