ÉNS de Lyon
M2 FEADEP

Cours d'algèbre
2018-2019

Feuille d'exercices n°11 : Formes quadratiques générales

Dans toute cette feuille K est un corps de caractéristique $\mathrm{car}(K) \neq 2$. On désignera par V un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et par q une forme quadratique sur V.

À faire

Exercice 1. ***(Identité du parallélogramme)***

1. Montrer que toute forme quadratique q sur le K-espace vectoriel V vérifie l'identité du parallélogramme
$$q(x+y) + q(x-y) = 2(q(x) + q(y)).$$
Pourquoi l'appelle-t-on ainsi ?
2. Montrer que si $K = \mathbb{C}$, il existe des fonctions vérifiant cette identité sans être des formes quadratiques.

Supposons maintenant que le corps de base est $K = \mathbb{R}$, et soit $q : V \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant l'identité du parallélogramme. On définit une fonction b sur $V \times V$ par $b(x,y) = \frac{q(x+y)-q(x)-q(y)}{2}$.

3. Avec trois applications de l'identité du parallélogramme, montrer que b est additive à droite, puis à gauche.
4. En déduire que b est bilinéaire symétrique et donc que q est une forme quadratique.
Indication : on pourra utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2. ***(Cône isotrope)***
On note $C(q)$, appelé *cône isotrope*, l'ensemble des vecteurs isotropes de q.

1. Montrer que $C(q)$ est stable par multiplication scalaire et que $\ker q \subset C(q)$.
2. Si $C(q) \neq \ker q$, montrer que q est surjective dans K. Donner ensuite un contre-exemple avec $q \neq 0$.
3. Soit W un sous-espace vectoriel de V. Montrer que si q est non dégénérée et $W \cap C(q) = \{0\}$, alors $W \oplus W^{\perp} = V$.
4. Montrer que si $C(q) \neq \{0\}$ et q est non dégénérée, alors $\mathrm{Vect}(C(q)) = V$.

Exercice 3. On suppose que q est non dégénérée. Soient deux vecteurs anisotropes distincts x, y de V tels que $q(x) = q(y)$.

1. Montrer qu'il existe au plus une réflexion de V envoyant x sur y.
2. Montrer qu'il existe une réflexion ou une composée de deux réflexions envoyant x sur y.
Indication : on pourra montrer que $x - y$ ou $x + y$ est anisotrope.
3. Décrire les orbites de $V \setminus C(q)$ sous l'action de $\mathcal{O}(q)$.

Exercice 4. Soit $\mathcal{Q}$ l'ensemble des formes quadratiques.

1. Montrer que $\mathcal{Q}$ est un K-espace vectoriel et préciser sa dimension.
2. On suppose que $K = \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{Q}^+$ des formes quadratiques q positives (resp. $\mathcal{Q}^{++}$ des formes quadratiques définies positives) est un convexe de $\mathcal{Q}$.
   (b) Pour $\mathcal{Q}^+$ et $\mathcal{Q}^{++}$, déterminer son adhérence dans $\mathcal{Q}$. Est-ce un ouvert de $\mathcal{Q}$?

Exercice 5. ***(Plans hyperboliques)***
On dit que W est un *plan hyperbolique* si $\dim W = 2$ et qu'il existe une base (e_1, e_2) de W, appelée *base hyperbolique*, dans laquelle la matrice de q est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, dans un plan hyperbolique, tout vecteur isotrope non nul se complète en une base hyperbolique.
2. Montrer que si V est de dimension 2, alors q est soit dégénérée, soit anisotrope, soit hyperbolique.
3. Montrer que si V de dimension supérieure à 2 et q est non dégénérée, si $x \in V$ est isotrope, alors il est contenu dans un plan P tel que $q_{|P}$ est hyperbolique.

Exercice 6. ***(Calculs explicites)***

1. Décomposer suivant l'algorithme de Gauss les formes quadratiques suivantes :
   (a) $q(x, y, z) = xy + xz + yz$ sur $\mathbb{Q}^3$.
   (b) $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2) + xt + xz + zt$ sur $\mathbb{Q}^4$.
   (c) La forme quadratique déterminant sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.
2. Donner le rang de la forme quadratique $M \mapsto \mathrm{Tr}(M^2)$.

Exercice 7. ***(Applications de la réduction de Gauss)***
Supposons que q est une forme quadratique de la forme

$$q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i^2,$$

avec $f_1, \ldots, f_n \in V^*$ linéairement indépendantes et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$.
Donner, pour q :

1. une expression de sa forme bilinéaire polarisée b_q ;
2. une base orthogonale de q ;
3. le noyau et le rang de q ;
4. le discriminant de q.

Problèmes

Exercice 8. ***(Indice d'une forme quadratique)***
Un sous-espace vectoriel W de V est dit *totalement isotrope* (ou SETI) si chacun de ses vecteurs est isotrope. On appelle *SETIM* un tel espace maximal pour l'inclusion. On note $\nu(q)$ la dimension maximale d'un SETI, on l'appelle *indice* de q.

1. Montrer que W est un SETI si, et seulement si, $W \subset W^\perp$.
2. Montrer que si W est un SETI, alors
$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V + \dim(W \cap \ker q).$$
3. En déduire que $\nu(q) \leq \dim V - \frac{\mathrm{rg}\, q}{2}$.
4. Soient W_1 et W_2 deux SETIM et $W = W_1 \cap W_2$. Soient des espaces vectoriels S_1 et S_2 tels que $W \oplus S_1 = W_1$ et $W \oplus S_2 = W_2$. Montrer que $S_1 \cap S_2^\perp = S_2 \cap S_1^\perp = 0$.
5. En déduire que les SETIM ont tous même dimension $\nu(q)$.
6. Donner cette dimension $\nu(q)$ dans le cas $K = \mathbb{R}$ et q de signature (r, s).