ÉNS de Lyon Cours d'algèbre
M2 FEADEP 2018-2019

# Feuille d'exercices n°13 : Groupe orthogonal. Réduction simultanée et décomposition polaire.

Dans toute cette feuille $K$ est un corps de caractéristique $\mathrm{car}(K) \neq 2$. On désignera par $V$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et par $q$ une forme quadratique sur $V$.

## À faire

**Exercice 1.** Soit $u : V \to V$ une fonction telle que $u(0) = 0$ et $q(u(x) - u(y)) = q(x - y)$ pour tous $x, y \in V$.

1. Montrer que $u$ est une application linéaire.
2. Montrer qu'en fait, on a $u \in \mathcal{O}(q)$.

**Exercice 2.** On suppose que $n \geq 2$ et que $q$ est non dégénérée. Soit $H$ un hyperplan de $V$ et $u \in \mathcal{O}(q)$ tel que $u_{|H} = \mathrm{id}_H$.

1. Montrer que si $H$ n'est pas singulier (i.e. $q_{|H}$ est non dégénérée), alors soit $u = \mathrm{id}_H$, soit $u = r_H$ est la réflexion orthogonale d'hyperplan $H$.
2. Montrer que si $H$ est singulier (i.e. $q_{|H}$ est non dégénérée), alors $u = \mathrm{id}_H$.

**Exercice 3.** ***(Générateurs d'un groupe orthogonal)***
On suppose que $q$ est non dégénérée.

1. Soit $r \in \mathrm{End}_K(V)$ tel que $r^2 = \mathrm{id}_V$. Soient $V^{\pm} = \ker(r \mp \mathrm{id}_V)$ les deux sous-espaces propres de $r$.
   (a) Montrer que $r \in \mathcal{O}(q) \iff V = V^+ \overset{\perp}{\oplus} V^-$.
   (b) Montrer que si $r \in \mathcal{O}(q)$, alors les espaces $V^+$ et $V^-$ ne sont pas isotropes.
2. Soit $x \in V$ non isotrope et $u \in \mathcal{O}(q)$. Montrer que $x + u(x)$ ou $x - u(x)$ est non isotrope.
3. Montrer que tout élément $u \in \mathcal{O}(q)$ s'écrit comme produit de réflexions orthogonales.
   *Indication : on pourra raisonner par récurrence et commencer par traiter le cas où il existe un vecteur $x$ non isotrope tel que $u(x) = x$.*

**Exercice 4.** ***(Générateurs d'un groupe spécial orthogonal)***
On suppose que $q$ est non dégénérée. On note $\mathcal{SO}(q) = \mathcal{O}(q) \cap \mathrm{SL}(V)$. On appelle *renversement* de $(V, q)$ un élément de $\mathcal{O}(q)$ qui est une symétrie par rapport à un sous-espace de codimension 2.

1. Montrer que tout renversement de $(V, q)$ est un élément de $\mathcal{SO}(q)$.
2. Montrer que si $r_1, r_2 \in \mathcal{O}(q)$ sont des réflexions, alors il existe des renversements $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{SO}(q)$ tels que $r_1 \circ r_2 = \rho_1 \circ \rho_2$.
3. En déduire que si $n \geq 3$, alors $\mathcal{SO}(q)$ est engendré par les renversements.
4. Pourquoi n'est-ce pas vrai lorsque $n = 2$ ?

**Exercice 5.** ***(Valeurs propres d'une matrice symétrique réelle)***
On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ et $\| \cdot \|$ la norme associée. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. On ordonne les valeurs propres $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ de $A$ (avec d'éventuelles répétitions). Montrer que $\lambda_1 = \min\limits_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle$ et que $\lambda_n = \max\limits_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle$.
2. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et tout sous-espace vectoriel $W$ de dimension $k$, montrer (en choisissant une base orthonormale adaptée) que $\lambda_k \geq \min\limits_{\substack{x \in W \\ \|x\|=1}} \langle Ax, x \rangle$, et en déduire que $\lambda_k = \max\limits_{\dim W = k} \min\limits_{\substack{x \in W \\ \|x\|=1}} \langle Ax, x \rangle$.
3. Montrer que les mineurs principaux de $A$ sont strictement positifs si, et seulement si, $A$ est définie positive.

**Exercice 6.** ***(Applications du théorème spectral, et décomposition polaire)***

1. Montrer que deux matrices symétriques réelles sont congruentes si elles sont semblables.
2. Calculer l'ensemble des $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tels que pour tout $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, on a $\operatorname{tr}(AB) \geq 0$.
3. Pour deux matrices $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, montrer que $\det(A+B) \geq \det(A) + \det(B)$.
4. Décrire les orbites de l'action de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $(O_1, O_2) \cdot M = O_1 M O_2^{-1}$.
5. Pour $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme subordonnée à la norme euclidienne, montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des points extrémaux de la boule unité.

**Exercice 7.** Soit $G$ un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$ telle que $G \subset \mathcal{O}(q)$.
2. En déduire $G$ est un sous-groupe d'un conjugué de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
3. Qu'en est-il si on remplace fini par compact ?

## Problèmes

**Exercice 8.** ***(Un peu de topologie)***

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, le groupe $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ (muni de la topologie induite par la topologie d'espace vectoriel normé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) est connexe par arcs.
2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, le groupe $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements, et que les retournements sont tous conjugués dans le groupe.
3. Soit $n$ et $m$ deux entiers $\geqslant 1$ distincts. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ ne sont pas isomorphes.
   *Indication : on pourra dénombrer les classes de conjugaison d'éléments d'ordre* 2.
4. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$) est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$).
5. Montrer que l'application exponentielle induit une bijection de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

**Exercice 9.** ***(Structure des groupes $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$)***
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est isomorphe au groupe des nombres complexes de module 1.
2. Déterminer le centre de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et celui de $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{PSO}_n(\mathbb{R})$ le quotient de $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ par son centre.
3. On suppose ici que $n = 3$.
   (a) Soit $N \lhd \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ un sous-groupe distingué de $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ non trivial. Démontrer qu'il contient un élément $u$ tel que $-1 \leq \operatorname{tr} u < 3$.
   (b) En considérant les commutateurs de $u$ et d'un élément de $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $t_0 < 3$ tel que, pour tout $t \in [t_0, 3]$, le groupe $N$ contient un élément de trace $t$.
   (c) En déduire que $N$ contient un élément d'ordre fini pair, puis que $N$ contient un retournement.
   (d) En déduire que $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ est simple.
4. On suppose que $n \geq 5$.
   (a) Pour tout sous-espace vectoriel $W \subset \mathbb{R}^n$, on considère $G_W = \{u \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}),\ u_{|W} = \mathrm{id}_W\}$. À quel groupe $G_W$ est-il isomorphe ?
   (b) Soit $u \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ différent de $\pm\,\mathrm{id}$. Montrer qu'il existe un élément $v \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ tel que le commutateur $c = [u, v]$ est différent de $\pm\,\mathrm{id}$ mais fixe un vecteur unitaire.
   (c) Démontrer qu'il existe $w \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ tel que le commutateur $[c, w]$ est différent de $\pm\,\mathrm{id}$ mais fixe un sous-espace vectoriel de codimension inférieure à 2.
   (d) En déduire la liste des sous-groupes distingués de $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ et la simplicité de $\mathcal{PSO}_n(\mathbb{R})$.
5. (cf. cours Géométrie) Montrer que le groupe $\mathcal{PSO}_4(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.
   *Indication : On pourra introduire l'algèbre $\mathbb{H}$ des quaternions sur $\mathbb{R}$.*