ÉNS de Lyon
M2 FEADEP

Cours d'algèbre
2018-2019

Feuille d'exercices n°15 : Séries formelles.

Dans toute cette feuille A est un anneau (unitaire) commutatif.

Exercice 1.

1. Montrer que
   (a) $\|a\| = 1$ pour tout $a \in A \setminus \{0\}$;
   (b) $\|fg\| \leq \|f\|\|g\|$ avec égalité si $f \in A$ ou si A est intègre ;
   (c) $\|f + g\| \leq \max(\|f\|, \|g\|)$.
2. En déduire que $\|\cdot\|$ est bien une norme sur $A[[T]]$.
3. Montrer que la topologie ainsi définie sur $A[[T]]$ ne dépend pas de la constante $c \in]1, +\infty[$.

Exercice 2. Montrer que $\lim\limits_{k\to\infty} \prod\limits_{n=0}^{k} \left(1 + T^{2^n}\right) = \sum T^n = \dfrac{1}{1-T}$.

Exercice 3. On définit, dans $K[[T]]$ avec K de caractéristique nulle, la série formelle

$$(1+X)^\alpha = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} T^n$$

où pour tout $\alpha \in K$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

1. Montrer que $\exp(\ln(1+T)) = 1 + T$ et $\ln(1 + (\exp(T) - 1)) = T$.
2. Montrer que pour tous $a, b \in K$, on a $\exp(aT)\exp(bT) = \exp((a+b)T)$.
3. Montrer que pour tout $\alpha \in K$, on a $(1+T)^\alpha = \exp(\alpha \ln(1+T))$.
4. En déduire que pour tous $\alpha, \beta \in K$, on a $(1+T)^\alpha(1+T)^\beta = (1+T)^{\alpha+\beta}$.

Exercice 4. ***(Automorphismes de $K[[X]]$)***
Pour tout $g \in K[[X]]$ non nul tel que $\nu(G) \geq 1$, on note

$$\varphi_g : f \mapsto f \circ g.$$

1. Montrer que φ_g est un endomorphisme d'algèbres injectif de $K[[X]]$.
2. Montrer que φ_g est surjectif si et seulement si $\nu(g) = 1$.
3. Montrer qu'on obtient ainsi tous les automorphismes d'algèbres de $K[[X]]$.
4. Avec la notion de distance de l'exercice 1 et la topologie associée, que dire de φ_g et de ses propriétés ?

Exercice 5. ***(Dénombrement des solutions positives d'une équation diophantienne)***
Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{N}^*$ des entiers premiers entre eux. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note d_n le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^m$ de l'équation diophantienne $\alpha_1 x_1 + \ldots \alpha_m x_m = n$.

1. Montrer que la série formelle $f = \sum d_n T^n$ est égale à $\prod_{i=1}^m \frac{1}{1-T^{\alpha_i}}$.
2. Montrer que $f = \frac{A}{(1-T)^m} + B$ avec $A \in \mathbb{C}$ et $B \in \mathbb{C}(T)$ sans pôle d'ordre supérieur à m et que 0 n'est pas un zéro de B.
3. On écrit $B = \sum b_n T^n \in \mathbb{C}[[T]]$. Montrer que $|b_n|$ est négligeable devant $\binom{n+m-1}{m-1}$ lorsque $n \to \infty$.
4. Calculer A et en déduire que $d_n \sim \frac{n^{m-1}}{(\prod_{i=1}^m \alpha_i)(m-1)!}$.

Exercice 6. ***(Séries génératrices et applications)***

1. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, en utilisant les formules de De Moivre, montrer que
$$\sum_{n\geq 0} \cos(n\theta) X^n = \frac{1-\cos(\theta)X}{1-2\cos(\theta)X+X^2}.$$
2. Par développement du dénominateur de la fraction rationnelle en série formelle, en déduire les expressions des polynômes de Tchebychev de première espèce.
3. Par la même méthode, calculer les polynômes de Tchebychev de seconde espèce.
4. On note D_n le nombre de permutations sans points fixes de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} = n!.$$
5. En considérant la série génératrice $\sum_{n\geq 0} D_n/n! X^n$, en déduire l'expression exacte
$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$
6. Calculer, pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, $S(n,k)$ le nombre de k-uplets d'entiers naturels dont la somme vaut n.

Exercice 7. ***(Polynômes irréductibles sur un corps fini)***

Soit p un nombre premier et $\mathcal{I}$ l'ensemble des polynômes irréductibles à coefficients dans $\mathbb{F}_p$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{I}_n$ le sous-ensemble des polynômes irréductibles de degré n.

1. Montrer que $\displaystyle\prod_{P\in\mathcal{I}} \frac{1}{1-T^{\deg P}} = \frac{1}{1-pT}$.
   Indication : utiliser la factorialité de $\mathbb{F}_p[T]$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{d|n} d\,\mathrm{Card}(\mathcal{I}_n) = p^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   Indication : appliquer log.

Exercice 8. ***(Sommes de Newton)***

On fixe ici $A = \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note
$$S_k = X_1^k + \cdots + X_n^k \in A$$
et $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_n$ les polynômes symétriques élémentaires, également dans A (pour $m > n$, on adoptera la convention $\Sigma_m = 0$).

1. Exprimer $P(T) = \prod_{i=1}^n (1 - X_i T) \in A[T]$ en fonction de $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_n$.
2. Démontrer que dans $A[[T]]$:
$$-\frac{TP'(T)}{P(T)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i T}{1-X_i T} = \sum_{k=1}^{+\infty} S_k T^k$$
3. En déduire, pour tout $k \geq 1$, l'identité :
$$S_k - \Sigma_1 S_{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1}\Sigma_{k-1} S_1 = (-1)^{k-1} k \Sigma_k$$
4. Démontrer que $S_k \in \mathbb{Z}[\Sigma_1, \cdots \Sigma_n]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, faire le calcul explicite pour S_1, S_2, S_3.
5. Réciproquement, montrer que $\Sigma_k \in \mathbb{Q}[S_1, \cdots, S_n]$ pour tout k, et faire le calcul explicite pour Σ_1, Σ_2 et Σ_3.

Exercice 9. ***((Non-)permanence des propriétés d'anneau)***

1. Montrer que si A est intègre, alors $A[[T]]$ est intègre.
2. Montrer que si A est noethérien, alors $A[[T]]$ est noethérien.
3. (Difficile) Montrer que si A est principal, alors $A[[T]]$ est factoriel.
4. (Très difficile) Donner un exemple où A est principal (resp. factoriel) et $A[[T]]$ n'est pas principal (resp. factoriel).