ÉNS de Lyon
M2 FEADEP

Cours d'algèbre
2018-2019

Feuille d'exercices n°1 : Espaces quotients, dualité et formes linéaires, transposition.

Dans toute cette feuille on fixe un corps K, et tous les espaces vectoriels considérés sont sur K.

À préparer

Quotients

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel et π la projection canonique $E \to E/F$. Soit S un sous-espace vectoriel de E. Montrer que S est un supplémentaire de F dans E si, et seulement si, $\pi_{|S}$ est un isomorphisme de S sur E/F.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel. Soit F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. On suppose que $G \subset F$. Montrer que F/G est un sous-espace vectoriel de E/G et qu'il existe un isomorphisme naturel d'espaces vectoriels $(E/G)/(F/G) \simeq E/F$.
2. Montrer qu'il existe un isomorphisme naturel $(F+G)/G \simeq F/(F \cap G)$.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in \operatorname{End}(E)$, et $F \subset E$ un sous-espace stable par u. On note $u' \in \operatorname{End}(F)$ la restriction de u à F, et $u'' \in \operatorname{End}(E/F)$ le morphisme induit sur E/F.

1. Soit $\mathbf{e}$ une base de E qui est la réunion d'une base $\mathbf{e}_F$ de F et d'une famille $\mathbf{e}_{E/F}$ telle que $\pi(\mathbf{e}_{E/F})$ est une base de E/F. Montrer que $\operatorname{Mat}_{\mathbf{e}}(u)$ est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$ où $A = \operatorname{Mat}_{\mathbf{e}_F}(u')$ et $C = \operatorname{Mat}_{\pi(\mathbf{e}_{E/F})}(u'')$.
2. En déduire que $\operatorname{tr} u = \operatorname{tr} u' + \operatorname{tr} u''$, que $\det u = (\det u')(\det u'')$, et que $\chi_u = \chi_{u'}\chi_{u''}$.

Dualité et formes linéaires

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel de dimension quelconque.

1. Montrer que $(E^*)^\top = \{0\}$. En déduire que l'application canonique $E \to E^{**}$, $x \mapsto (f \mapsto f(x))$ est toujours injective. Montrer que si E est de dimension finie c'est une bijection.
2. Soit F et G des sous-espaces de E. Montrer que :
   (a) $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$;
   (b) $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$;
   (c) $((F^\perp)^\top)^\perp = F^\perp$;
   (d) $F \neq G \Rightarrow F^\perp \neq G^\perp$;
   (e) $(F^\perp)^\top = F$.
3. Soit V et W des sous-espaces de E^*. Montrer que :
   (a) $(V+W)^\top = V^\top \cap W^\top$;
   (b) $V^\top + W^\top \subset (V \cap W)^\top$;
   (c) $V \subset (V^\top)^\perp$.
4. Montrer que les inclusions précédentes sont des égalités lorsque E est de dimension finie.
   On pourra utiliser les résultats de l'exercice 8.

Exercice 5.

1. Soit f et g deux formes linéaires sur E. Montrer qu'elles ont même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles.
2. Montrer que tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et (f_i) une famille d'éléments de E^*.

1. Montrer que les f_i engendrent E^* si, et seulement si, $\cap_i \ker f_i = \{0\}$.
2. En déduire que, plus généralement, l'espace engendré par les f_i est le sous-espace $\{f \in E^*, \cap_i \ker f_i \subset \ker f\}$. Donner une relation entre la dimension de l'espace engendré et la dimension de $\cap_i \ker f_i$.

Transposition

Soit V et W deux espaces vectoriels, et $f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$. On note f^t la transposée de f, c'est-à-dire l'élément de $\mathrm{Hom}_k(W^*, V^*)$ donné par $f^t(\lambda) = \lambda \circ f$.

Exercice 7. Montrer que $f \mapsto f^t$ est une application linéaire injective. En déduire qu'elle est bijective si V et W sont de dimension finie.

Exercice 8. Soit V un espace vectoriel et W un sous-espace. On note $\iota : W \to V$ l'inclusion canonique et $\pi : V \to V/W$ l'application quotient.

1. Vérifier que pour tout $f \in V^*$, la forme linéaire $\iota^t(f)$ est la restriction de f à W.
2. Montrer que π^t définit un isomorphisme canonique entre $(V/W)^*$ et $W^\perp$.
3. En déduire que si V est de dimension finie, alors $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$ et qu'on a l'égalité analogue pour les sous-espaces de V^*.
4. Soit $f \in \mathrm{End}(V)$. Montrer que W est stable par f si, et seulement si, $(V/W)^*$ est stable par $f^t \in \mathrm{End}(V^*)$.
5. On suppose W stable par u, et on note u_W et $u_{V/W}$ respectivement les morphismes induits sur W et V/W. Montrer que $(u_W)^t = (u^t)_{V^*/W^\perp}$ et $(u_{V/W})^t = (u^t)_{W^\perp}$.

Exercice 9. Soit $f : V \to W$ une application linéaire.

1. Montrer que $\ker f^t = (\mathrm{im}\, f)^\perp$ et $\mathrm{im}\, f^t = (\ker f)^\perp$.
2. En déduire que f est injective si, et seulement si, f^t est surjective ; que f est surjective si, et seulement si, f^t est injective.
3. Si V et W sont de dimension finie, montrer que f et f^t ont même rang.
4. On fixe des bases $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ de V et W respectivement. Donner l'écriture de $\mathrm{Mat}_{\mathbf{w}^*,\mathbf{v}^*}(f^t)$ en fonction de celle de $\mathrm{Mat}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(f)$.

Exercice 10. Soit V et W des espaces vectoriels de dimension finie et soit $f : V \to W$ une application linéaire.

1. Montrer qu'il existe une famille finie $(w_i)_{i \in I}$ d'éléments de W et une famille finie de formes linéaires $\lambda_i \in V^*$ telles que $f = \sum_i \lambda_i w_i$.
2. Montrer que le rang de f est le nombre minimal d'éléments w_i nécessaires pour une telle écriture.
3. Soit $(w_i)_i$ une base de W. Montrer qu'il existe une unique famille (λ_i) d'éléments de V^* telle que $f = \sum_i \lambda_i w_i$.
4. Montrer que, avec ces notations, l'image de f^t est le sous-espace de V^* engendré par les λ_i.

Exercice 11. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathrm{End}(E)$.

1. Montrer que pour tout polynôme P, on a $P(u^t) = P(u)^t$. En déduire que $\mu_u = \mu_{u^t}$ (où μ est le polynôme minimal).
2. Montrer que $\chi_u = \chi_{u^t}$.

Problèmes

Exercice 12. Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, on pose $[A, B] = AB - BA$. On définit également $\lambda_A \in \mathcal{M}_n(K)^*$ par $\lambda_A(M) = \mathrm{tr}(AM)$ et $\mathcal{C}_A = \{C \in \mathcal{M}_n(K),\ [A, C] = 0\}$.

1. Montrer que $\begin{array}{rccc} \lambda : & \mathcal{M}_n(K) & \to & \mathcal{M}_n(K)^* \\ & A & \mapsto & \lambda_A \end{array}$ est un isomorphisme.
2. Montrer que $\{[A, B],\ A, B \in \mathcal{M}_n(K)\} = K\,\mathrm{tr}$.
3. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ et $C \in \mathcal{C}_A$. Montrer que $\mathrm{tr}([A, B]C) = 0$.
4. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ telles que λ_B s'annule sur $\mathcal{C}_A$. Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $B = [A, C]$.

Exercice 13. Soit $h \in \mathbb{R}$. On définit l'application $\mathbb{R}$-linéaire suivante :

$$\begin{array}{rccc} \tau_h : & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & \big(x \mapsto f(x+h)\big) \end{array}$$

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de dimension finie n. Le but de cet exercice est de montrer que si E est stable par les translations τ_h pour tout $h \in \mathbb{R}$, alors E est l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

1. À tout $x \in \mathbb{R}$, on associe la forme linéaire $\delta_x \in E^*$ définie par $\delta_x(f) = f(x)$. Montrer qu'il existe des réels $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $(\delta_{x_i})_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E^*.
2. Montrer que $h \mapsto (\tau_h)_{|E}$ est continue (pour toute norme sur $\mathcal{L}(E)$).
   Indication : on pourra considérer une base antéduale.
3. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a $\tau_h = \exp(hu)$.
   Indication : penser à la convolution (sous-groupe à 1 paramètre) ou montrer que $\tau_h \in \mathcal{C}^\infty$.
4. Montrer que pour tout $f \in E$, on a f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u(f)$.
5. Conclure.
   Indication : considérer le polynôme caractéristique de u.