ÉNS de Lyon
M2 FEADEP

Cours d'algèbre
2018-2019

Feuille d'exercices n°2 : Systèmes linéaires, formes multilinéaires, déterminant.

À faire

Exercice 1. Pour chacune des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&3\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\2&-1&2\\4&-1&4\end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix}1&2&3&2\\2&3&4&2\\3&4&5&2\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}0&-1&2&2\\2&-3&4&2\\3&4&-5&2\\-4&-2&2&1\end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix}1&-1&2&-2\\-2&4&6&8\\3&-4&-5&2\\2&-2&-2&-1\end{pmatrix},$$

calculer (par générateurs ou relations, au choix) son rang ; son noyau ; son image.

Exercice 2. Discuter, selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$, le système :

$$\left\{\begin{array}{ccc}3x+y-z&=&1\\x-2y+2z&=&m\\x+y-z&=&1\end{array}\right.$$

Formes multilinéaires

Soit E un espace vectoriel, et $r \geq 1$. On note $\mathcal{L}_r(E)$ l'espace des applications r-linéaires de E^r dans K. On note $\mathcal{S}_r(E)$ le sous-espace des applications symétriques, c'est-à-dire des f telles que $f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(r)}) = f(x_1,\dots,x_r)$ pour tout $(x_1,\dots,x_r) \in E^r$ et tout $\sigma \in \mathfrak{S}_r$. On note $\mathcal{A}_r(E)$ le sous-espace des applications antisymétriques, c'est-à-dire des f telles que $f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(r)}) = \varepsilon(\sigma)f(x_1,\dots,x_r)$ pour tout $(x_1,\dots,x_r) \in E^r$ et tout $\sigma \in \mathfrak{S}_r$.

Exercice 3.

1. Montrer que si K est de caractéristique 2, alors $\mathcal{S}_r(E) = \mathcal{A}_r(E)$.
2. Montrer que si K n'est pas de caractéristique 2, alors $\mathcal{L}_2(E) = \mathcal{S}_2(E) \oplus \mathcal{A}_2(E)$.
3. On suppose que K n'est pas de caractéristique 2. Montrer que $\mathcal{A}_r(E)$ est l'ensemble des formes alternées, c'est-à-dire des f telles que $f(x_1,\dots,x_r) = 0$ dès que la famille $(x_1,\dots,x_r)$ est liée.
4. Si K est de caractéristique 2, quelle est la relation entre $\mathcal{A}_r(E)$ et l'ensemble des formes alternées ?

Exercice 4. Donner des bases de $\mathcal{L}_r(E)$, de $\mathcal{S}_r(E)$ et de $\mathcal{A}_r(E)$. En déduire la dimension de $\mathcal{A}_r(E)$ pour tout r.

Exercice 5. Soit V et W deux espaces vectoriels de dimension finie. On note $\mathcal{L}_2(V,W)$ l'espace des applications bilinéaires de $V \times W$ dans K.

1. Donner des isomorphismes $u_1 : \mathcal{L}_2(V,W) \to \mathrm{Hom}(V,W^*)$ et $u_2 : \mathcal{L}_2(V,W) \to \mathrm{Hom}(W,V^*)$.
2. Soit $\varphi \in \mathcal{L}_2(V,V)$. Montrer que $u_1(\varphi)$ et $u_2(\varphi)$ ont même rang, appelé le rang de ϕ.
   Indication : on pourra fixer des bases $\mathbf{v}$ *de* V *et* $\mathbf{w}$ *de* W *et comparer la matrice de* φ *dans les bases* $\mathbf{v}$ *et* $\mathbf{w}$*, la matrice de* $u_1(\varphi)$ *dans les bases* $\mathbf{v}$ *et* $\mathbf{w}^*$ *et la matrice de* $u_2(\varphi)$ *dans les bases* $\mathbf{w}$ *et* $\mathbf{v}^*$*.*

Exercice 6. Soient V, W des espaces vectoriels, $\lambda_1,\dots,\lambda_r \in V^*$ et $\mu_1,\dots,\mu_r \in W^*$.

1. Montrer que l'application
$$\begin{array}{cccc}\varphi: & V\times W & \to & K\\ & (x,y) & \mapsto & \sum_{i=1}^r \lambda_i(x)\mu_i(y)\end{array}$$
   est dans $\mathcal{L}_2(V,W)$.
2. Montrer que le rang de φ est inférieur ou égal à r.

Exercice 7. Soit $\varphi \in \mathcal{S}_2(V)$.

1. Montrer que $u_1(\varphi) = u_2(\varphi)$. On notera cette application φ_V.
2. Soit W un supplémentaire de $\ker \varphi_V$ dans V. Montrer que la restriction de φ à $W \times W$ est non dégénérée (c'est-à-dire de rang maximal).
3. Soit W un sous-espace de V tel que la restriction de φ à $W \times W$ soit non dégénérée. Montrer que W est contenu dans un supplémentaire de $\ker \varphi_V$.

Exercice 8. ***(Déterminant)***
Soit A un anneau commutatif unitaire.

1. Montrer qu'il existe une unique application $\det : \mathcal{M}_n(A) \to A$ qui est A-multilinéaire, alternée par rapport aux colonnes, et telle que $\det(\mathrm{I}_n) = 1$.
2. Montrer que pour toute famille de coefficients $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$, toute famille de vecteurs colonnes $C_1, \ldots, C_n$ de taille n, et tout $i \in [\![1, n]\!]$ on a (*règle de Cramer*) :
$$a_i \det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n) = \det\left(C_1, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_i C_i, \ldots, C_n\right)$$
3. Soient $C_1, \ldots, C_n$ des vecteurs colonnes de taille n. On pose $D_j = a_{j,1}C_1 + \cdots a_{j,n}C_n$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $\det(D_1, \ldots, D_n) = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}\right) \cdot \det(C_1, \ldots, C_n)$.
4. Retrouver que lorsque A est un corps, la famille de vecteurs $(C_1, \ldots, C_n)$ in A^n est libre si, et seulement si, $\det(C_1, \ldots, C_n) = 0$. Que se passe-t-il en général pour sur un anneau A ?
5. Montrer que $\det(M) = \det({}^tM)$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
6. Soit $M = ((m_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On appelle (i, j)-ème *mineur* de M le déterminant $\Delta_{i,j}(M)$ de la matrice extraire de M en ôtant la i-ème ligne et la j-ème colonne de M. Le nombre $M_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(M)$ est appelé le (i, j)-ème *cofacteur* de M. Montrer que $\det(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,j}M_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}M_{i,k}$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$.
7. Soit $\mathrm{com}(M) = ((M_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice des cofacteurs de M, appelée *comatrice* de M. Montrer que ${}^t\mathrm{com}(M)M = M{}^t\mathrm{com}(M) = \det(M) \cdot \mathrm{I}_n$. En déduire que M est inversible dans $\mathcal{M}_n(A)$ si, et seulement si, $\det(M)$ est inversible dans A.

Pour aller plus loin

Exercice 9. ***(Pfaffien)***
On considère $E = K^n$ un K-espace vectoriel de dimension paire $n = 2m$.

1. Soit φ une forme bilinéaire alternée sur E. Montrer que E se décompose en une somme directe $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_m$ de m sous-espaces de dimension 2 stables par φ.
2. En déduire que toute matrice antisymétrique $M \in \mathcal{A}_{2m}(K)$ est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Montrer qu'il existe un unique polynôme $\mathrm{Pf}_m \in \mathbb{Z}[X_{i,j}\,,\ 1 \leq i < j \leq 2m]$ tel que :
   – pour tout corps K et toute matrice antisymétrique $A \in \mathcal{A}_{2m}(K)$, on a $\mathrm{Pf}_m(A)^2 = \det(A)$;
   – $\mathrm{Pf}_m(\mathrm{diag}(J, \ldots, J)) = 1$.
4. Montrer que le polynôme ainsi défini Pf_m est homogène et irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 10. ***(Application aux classes de conjugaison dans*** $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$***)***
Soit $M \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) la matrice $A = M - {}^tM$ est inversible ;
   (ii) le polynôme caractéristique χ_M n'a pas de racines réelles ;
   (iii) $\mathrm{Pf}(M) \neq 0$.
2. En déduire que deux matrices $M, N \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sont conjuguées si, et seulement si, $\chi_M = \chi_N$ et $\mathrm{Pf}(M - {}^tM) = \mathrm{Pf}(N - {}^tN)$.