

FEUILLE D'EXERCICES N°3 :
POLYNÔMES D'ENDOMORPHISMES, RÉDUCTION, DÉCOMPOSITIONS.

Dans toute cette feuille on fixe un corps K , et tous les espaces vectoriels considérés sont sur K et de dimension finie.

À faire

Polynômes d'endomorphismes et sous-espaces stables

Pour $\lambda \in K$ et $u \in \text{End}(E)$, on note $E'_u(\lambda) = \cup_{k \geq 0} \ker(u - \lambda \text{id})^k$ le sous-espace caractéristique associé à λ et $E_u(\lambda) = \ker(u - \lambda \text{id})$ le sous-espace propre associé à λ . On note également χ_u le polynôme caractéristique de u et μ_u le polynôme minimal de u .

Exercice 1. Soit $P, Q \in K[X]$ deux polynômes. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \text{End}(E)$.

1. Montrer que $\ker \text{pgcd}(P, Q)(u) = \ker P(u) \cap \ker Q(u)$ et que $\text{Im } \text{pgcd}(P, Q) = \text{Im } P(u) + \text{Im } Q(u)$.
2. Montrer que $\ker \text{ppcm}(P, Q)(u) = \ker P(u) + \ker Q(u)$ et que $\text{Im } \text{ppcm}(P, Q) = \text{Im } P(u) \cap \text{Im } Q(u)$.
3. Rappeler et démontrer le lemme des noyaux.

Exercice 2. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \text{End}(E)$. Soit F un sous-espace stable par u .

1. On suppose que F admet un supplémentaire G stable par u . Montrer que $\mu_u = \text{ppcm}(\mu_{u_F}, \mu_{u_G})$.
2. Montrer que $\text{ppcm}(\mu_{u_F}, \mu_{u_{E/F}}) \mid \mu_u \mid \text{ppcm}(\mu_{u_F}, \mu_{u_{E/F}})^2$.

Exercice 3. Montrer l'équivalence entre :

- (i) $\chi_u(\lambda) = 0$
- (ii) $E_u(\lambda) \neq \{0\}$
- (iii) $E'_u(\lambda) \neq \{0\}$

Exercice 4.

1. Montrer que chaque $E'_u(\lambda)$ et $E_u(\lambda)$ est un sous-espace stable de u .
2. Montrer que si v commute à u , alors v stabilise les $E'_u(\lambda)$ et $E_u(\lambda)$, ainsi que $\text{im } u$.
3. Trouver deux endomorphismes u et v qui commutent pour lesquels il existe un sous-espace stable par u qui n'est pas stable par v .
4. Soit v un polynôme en u . Montrer que tout sous-espace stable par u est stable par v .

Exercice 5.

1. Montrer que les $E'_u(\lambda)$ sont en somme directe, ainsi que les $E_u(\lambda)$.
2. Montrer, sans utiliser χ_u , que le nombre de $\lambda \in K$ tels que $E'_u(\lambda) \neq \{0\}$ est inférieur à $\dim E$.

Exercice 6. Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. La **matrice compagnon** de P , carrée de taille n , est définie par :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de C_P est exactement P .
2. Montrer que le polynôme minimal de C_P est également P .
3. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton, à savoir $\chi_u(u) = 0$.
4. Montrer que C_P est inversible si, et seulement si, $P(0) \neq 0$. Donner une expression de C_P^{-1} dans ce cas.

Diagonalisation des endomorphismes

Exercice 7. (Critères de diagonalisation)

1. Montrer l'équivalence entre :
 - (i) $E = \bigoplus_{\lambda} E_u(\lambda)$;
 - (ii) u est annulé par un polynôme scindé à racines simples ;
 - (iii) μ_u est scindé à racines simples ;
 - (iv) E admet une base formée de vecteurs propres pour u ;
 - (v) u est *diagonalisable*, c'est-à-dire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.
2. Montrer que si u est diagonalisable et si F est un sous-espace stable par u , alors u_F et $u_{E/F}$ sont diagonalisables.

Exercice 8.

1. Soit G un sous-groupe fini de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que tout élément de G est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des racines de l'unité.
2. Trouver un exemple de corps K (algébriquement clos si possible) pour lequel cette propriété n'est plus vérifiée.

Exercice 9. Dans cet exercice $K = \mathbb{C}$. Montrer que si u est diagonalisable, alors u a au moins une racine carrée. Si les valeurs propres de u sont distinctes et non nulles, montrer que u a exactement $2^{\dim E}$ racines carrées.

Endomorphismes trigonalisables

Exercice 10. (Critères de trigonalisation)

1. Montrer que toute racine de μ_u est une valeur propre de u , et donc une racine de χ_u .
2. Montrer que toute valeur propre de u est racine de μ_u .
3. Montrer l'équivalence entre :
 - (i) $E = \bigoplus_{\lambda} E'_u(\lambda)$;
 - (ii) u est annulé par un polynôme scindé ;
 - (iii) μ_u est scindé ;
 - (iv) χ_u est scindé ;
 - (v) u est trigonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.
4. On suppose que les conditions précédentes sont vérifiées. Montrer que pour tout $\lambda \in K$, le projecteur π_{λ} sur $E'_u(\lambda)$ parallèlement à $\bigoplus_{\mu \neq \lambda} E'_u(\mu)$ est un polynôme en u .
5. On suppose que u est trigonalisable et que F est stable par u . Montrer qu'alors $F = \bigoplus_{\lambda} (F \cap E'_u(\lambda))$.

Exercice 11.

1. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille commutative d'endomorphismes diagonalisables.
 - (a) Montrer qu'ils sont codiagonalisables, c'est-à-dire qu'il existe une base formée de vecteurs propres pour chacun des u_i .
 - (b) En déduire si u et v sont diagonalisables et commutent, alors $u + v$ est diagonalisable.
2. Soit (u_i) une famille commutative d'endomorphismes trigonalisables.
 - (a) Montrer qu'ils sont cotrigonalisables, c'est-à-dire qu'il existe une base dans laquelle la matrice de chacun des u_i est triangulaire supérieure.
 - (b) En déduire que, si u et v sont trigonalisables et commutent, alors $u + v$ est trigonalisable.
3. Trouver deux matrices simultanément trigonalisables mais qui ne commutent pas.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier. Soient $M_1, \dots, M_n \in \mathcal{M}_n(K)$ des matrices nilpotentes qui commutent deux à deux. Montrer que le produit des n matrices $M_1 \cdots M_n$ est égal à 0.

Exercice 12.

1. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u^t l'est.
2. Montrer que u est trigonalisable si et seulement si u^t l'est.

Endomorphismes nilpotents

Un endomorphisme est *nilpotent* s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$. Si u est nilpotent, on dit que u est nilpotent d'indice m si $u^m = 0$ et $u^{m-1} \neq 0$.

Exercice 13. Soit $u \in \text{End}(E)$ un endomorphisme quelconque.

1. Soit $x \in E$ tel que $u^m(x) = 0$ et $u^{m-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $(x, u(x), \dots, u^{m-1}(x))$ est libre.
2. Montrer que tout endomorphisme nilpotent est d'indice inférieur à $\dim E$.
3. Montrer $E'_u(\lambda) = \ker(u - \lambda \text{id})^{\dim E}$ pour tout λ .
4. Soit m_λ la multiplicité de la racine λ de χ_u . Montrer que $\dim E'_u(\lambda) = m_\lambda$ et que $E'_u(\lambda) = \ker(u - \lambda \text{id})^{m_\lambda}$.

Exercice 14. On suppose χ_u scindé.

1. On pose $d = \sum \lambda \pi_\lambda$, et $n = u - d$. Montrer que :
 - d est diagonalisable,
 - n est nilpotent,
 - $u = d + n$,
 - d et n commutent,
 - d et n sont des polynômes en u .
2. Soit $u = d' + n'$ une autre décomposition de u pour laquelle :
 - d' est diagonalisable,
 - n' est nilpotent,
 - $u = d' + n'$,
 - d' et n' commutent.

Montrer que d' et n' commutent à d et n . En déduire que $d' = d$ et $n' = n$.

Le couple (d, n) s'appelle la **décomposition de Dunford** de u .

Exercice 15. Soit $u \in \text{End}(E)$ un endomorphisme d'un K -espace vectoriel E de dimension finie.

1. On suppose que u est nilpotent. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\text{tr}(u^k) = 0$.
2. On suppose que $\text{tr}(u^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et que K est de caractéristique 0. Montrer que u est nilpotent.
3. Qu'advient-il en caractéristique p ?

Exercice 16. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices et $C = AB - BA$. On suppose que $AC - CA = 0$. Montrer que C est nilpotente.

Exercice 17. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ deux matrices trigonalisables. On définit $\Phi_{A,B} \in \text{End}(\mathcal{M}_n(K))$ par $\Phi_{A,B}(X) = AX - XB$.

1. Montrer que $\Phi_{A,B}$ est aussi trigonalisable.
2. Montrer que les matrices A et B sont diagonalisables si, et seulement si, $\Phi_{A,B}$ l'est aussi.
Indication : On pourra utiliser la décomposition de Dunford de A et de B .

Problèmes

Classes de similitudes et réduction

Exercice 18. Le but de cet exercice est de montrer que deux permutations $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ sont conjuguées si, et seulement si, les matrices de permutations $P_\sigma, P_\tau \in \mathcal{M}_n(K)$ sont semblables.

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit $c_k(\sigma)$ comme le nombre de cycles de longueur k de σ .

1. Décrire les classes de conjugaison dans \mathfrak{S}_n à l'aide des c_k .
2. On pose $V^\sigma = \{v \in K^n, P_\sigma(v) = v\}$. Déterminer $\dim V^\sigma$ en fonction des $c_k(\sigma)$.
3. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=1}^n c_k(\sigma^m) = \sum_{k=1}^n \text{pgcd}(k, m) c_k(\sigma)$.
4. Soit A la matrice ayant pour coefficients $a_{i,j} = \text{pgcd}(i, j)$. Calculer $\det A$.
5. En déduire que si P_σ et P_τ sont conjuguées, alors σ et τ sont semblables.
6. Conclure.

Exercice 19. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice quelconque. On note $S(A) = \{P^{-1}MP, P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})\}$ l'ensemble des matrices semblables à A et $\overline{S(A)}$ son adhérence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Réaliser $S(A)$ comme une orbite pour l'action d'un certain groupe sur un certain ensemble que l'on précisera.
2. Montrer que $S(A)$ contient une matrice diagonalisable.
3. Montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe une matrice $B \in S(A)$ telle que B est triangulaire supérieure et dont les coefficients non diagonaux sont de module inférieur à ε .
4. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, $S(A)$ est fermé.
5. Montrer que A est nilpotente si, et seulement si, $0 \in \overline{S(A)}$.

Décomposition de Dunford effective

Exercice 20. Soit u un endomorphisme de E . On suppose qu'il existe un polynôme $P \in K[X]$ tel que P est premier à P' , et $P(u)^m = 0$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$. On se propose de montrer l'existence de $v, w \in K[u]$ tels que w est nilpotent, $P(v) = 0$ et $u = v + w$.

On définit par récurrence une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en posant $u_0 = u$ et $u_{k+1} = u_k - P(u_k)P'(u_k)^{-1}$ pour tout $k \geq 0$.

1. Montrer que u_{k+1} est bien défini pour tout $k \in \mathbb{N}$ et que $P^m(u_i) = 0$ pour tout i .
2. Montrer qu'il existe un indice k tel que $P(u_k) = 0$ et conclure.
3. Quelle relation y a-t-il entre une décomposition ainsi construite et la décomposition de Dunford ? Donner des exemples pour lesquels les hypothèses de l'énoncé s'appliquent.

Exercice 21. (Théorème de Burnside)

Soit G un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ et (M_1, \dots, M_r) une base de $\text{Vect}(G)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose

$$f : \begin{array}{l} G \rightarrow \mathbb{C}^r \\ A \mapsto (\text{tr}(AM_i))_i \end{array} .$$

1. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que N est nilpotente si, et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\text{tr}(N^k) = 0$.
2. Montrer que si $f(A) = f(B)$, alors $AB^{-1} - I_n$ est nilpotente.
3. Montrer que si tous les éléments de G sont diagonalisables, alors f est injective.
4. En déduire que tout sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini est en fait un groupe fini.

Pour aller plus loin

Décomposition de Jordan

Si m est un entier, on appelle bloc de Jordan nilpotent de taille m et on note J_m la matrice carrée de taille m suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 22.

1. Montrer que J_n est la matrice d'un endomorphisme nilpotent d'indice n .
2. Réciproquement, montrer que si u est un endomorphisme nilpotent d'indice n de E de dimension n , alors existe une base de E dans laquelle la matrice de u est J_n .

Exercice 23. Soit u un endomorphisme nilpotent. On dira que u est **jordanisable** s'il existe une décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$ en sous-espaces stables par u tels que, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on a $u|_{E_i}$ est nilpotent d'indice $\dim E_i$.

1. Montrer que si u est nilpotent d'indice $\dim E$, alors u est jordanisable.
2. Montrer que s'il existe une décomposition $E = F \oplus G$ stable par u telle que $u|_F$ et $u|_G$ sont jordanisables, alors u est jordanisable.
3. Soit p l'indice de nilpotence de u et x tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$. On note F_x l'espace engendré par les $u^i(x)$. Montrer que F_x est un sous-espace de E stable par u et que F_x a un supplémentaire stable. *Indication : on pourra considérer une forme linéaire f telle que $f(u^{p-1}(x)) \neq 0$, et le sous-espace F_f de E^* engendré par les $(u^*)^i(f)$.*
4. En déduire que tout endomorphisme nilpotent est jordanisable.
5. On suppose u jordanisée. Donner une formule reliant, pour tout $i \geq 0$, le rang de u^i avec les $\dim E_j$. En déduire que la famille $(\dim E_1, \dots, \dim E_r)$ est unique à permutation près.
6. Énoncer et démontrer un théorème de jordanisation pour les endomorphismes u annulés par un polynôme scindé.

Exercice 24. Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ et $t \in K^\times$.

1. Montrer que si M est nilpotente, alors M et tM sont semblables.
2. Montrer que si t n'est pas une racine de l'unité et si M et tM sont semblables, alors M est nilpotente.

Semi-simplicité

Soit E un K -espace vectoriel de dimension $\dim E = n$.

Exercice 25. On dit qu'un endomorphisme $u \in \text{End}(E)$ est **simple** si ses seuls sous-espaces stables sont $\{0\}$ et E .

1. Montrer que si u est simple, alors $\mu_u = \chi_u$.
2. En déduire que u est simple si, et seulement si, μ_u est irréductible sur K .

Exercice 26. On dit qu'un endomorphisme $u \in \text{End}(E)$ est **cyclique** s'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $\text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)) = E$.

1. Justifier que tout endomorphisme simple est cyclique.
2. On suppose que K est infini. Montrer que si u n'a qu'un nombre fini de sous-espaces stables, alors u est cyclique.
3. Soit u un endomorphisme cyclique et $x \in E$ tel que $\text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)) = E$. Soit $\Phi : K[X] \rightarrow E$ l'application linéaire définie par $\Phi(P) = P(u)(x)$.
 - (a) Montrer que F est un sous-espace stable par u de E si, et seulement si, $\Phi^{-1}(F)$ est un idéal de $K[X]$.
 - (b) En déduire que u n'a qu'un nombre fini de sous-espaces stables. *Indication : Penser au polynôme minimal de u .*

Exercice 27. Soit $u \in \text{End}(E)$ un endomorphisme. On dit qu'un sous-espace $F \subset E$ stable par u est **cyclique** si la restriction $u|_F$ de u à F est un endomorphisme cyclique.

1. On suppose que $\mu_u = P^k$ où P est irréductible sur $K[X]$. Montrer que u admet un sous-espace cyclique F tel que $v = u|_F$ vérifie $\mu_v = \mu_u$.
2. Pour $x \in E$, on note $F_x = \text{Vect}(u^k(x), k \in \mathbb{N})$ et $u_x = u|_{F_x}$. Soit $x, y \in E$. Montrer que si μ_{u_x} et μ_{u_y} sont premiers entre eux, alors $\mu_{u_{x+y}} = \mu_{u_x} \mu_{u_y}$.
3. Montrer qu'il existe un sous-espace cyclique F tel que $\mu_{u|_F} = \mu_u$.
4. En déduire que u est cyclique si, et seulement si, $\mu_u = \chi_u$.

Exercice 28. On dit qu'un endomorphisme $u \in \text{End}(E)$ est **semi-simple** si tout sous-espace stable par u admet un supplémentaire stable.

1. Montrer que u est semi-simple si, et seulement si, μ_u est sans facteurs carrés.
2. En déduire que u est semi-simple si, et seulement si, u est diagonalisable sur une clôture algébrique \overline{K} de K .
3. Montrer que u est semi-simple si, et seulement si, il existe une décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$ en sous-espaces E_i stables par u tels que pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, la restriction $u|_{E_i}$ est simple.
4. (bonus) Montrer que lorsque K est de caractéristique 0, on peut encore définir une décomposition de Dunford (s, n) avec s semi-simple, n nilpotent qui commutent et tels que $u = s + n$.
5. (bonus) Soit k un corps imparfait de caractéristique p et $T \in k$ un élément qui n'est pas une puissance p -ème d'un élément de k . Soit $K = k(T)$. Soit $E = K[X]/(X^p - T)^2$: c'est un K -espace vectoriel de dimension $2p$. Soit $M_X \in \text{GL}(E)$ l'endomorphisme de multiplication par X . Montrer qu'il n'existe pas de décomposition de Dunford pour M_X .

Indication : On pourra considérer W l'idéal engendré par $X^p - T$ de E vu comme anneau et se restreindre à la structure de K -espace vectoriel de W .