Feuille d'exercices n°4 : Actions de groupes ; Sous-groupes distingués, groupes quotients

À faire

Exercice 1. ***(Groupe quotient)***
Soit G un groupe et H un sous-groupe distingué de G. Soit K un sous-groupe de G.

1. Montrer que les sous-groupes de G/H sont en bijection avec les sous-groupes de G contenant H.
2. Montrer que $KH = HK$ et que c'est un sous-groupe de G dans lequel H est distingué.
3. Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe distingué de K.
4. Montrer qu'on a un isomorphisme $KH/H \simeq K/(K \cap H)$.
5. Soit $\pi : G \to G/H$ la projection canonique. Á quelle condition la restriction de π à K est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2. ***(Normalisateur)***
Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. On rappelle que le *normalisateur* de H dans G est l'ensemble $\mathcal{N}_G(H) = \left\{g \in G,\ gHg^{-1} = H\right\}$.

1. Montrer que $\mathcal{N}_G(H)$ est un sous-groupe de G dans lequel H est distingué.
2. Soit K un sous-groupe de G contenant H et dans lequel H est distingué. Montrer que K est un sous-groupe de $\mathcal{N}_G(H)$. En déduire que $\mathcal{N}_G(H)$ est le plus grand sous-groupe de G dans lequel H est distingué.
3. Montrer que pour tout sous-groupe K de $\mathcal{N}_G(H)$, l'ensemble KH est un groupe dans lequel H est distingué.
4. On définit une action de G sur l'ensemble de ses sous-groupes par $g \cdot K = gKg^{-1}$.
   (a) Quel est le stabilisateur d'un sous-groupe de G pour cette action ?
   (b) On suppose que G est fini. Montrer que le nombre de sous-groupes de G conjugués à H est l'indice $[G : \mathcal{N}_G(H)]$.
   (c) Montrer que si H et K sont deux-sous groupes de G conjugués dans G, alors $\mathcal{N}_G(H)$ et $\mathcal{N}_G(K)$ aussi.

Exercice 3. Soit G un groupe fini et p le plus petit facteur premier de $|G|$.

1. Montrer que si H est un sous-groupe de G d'indice p, alors H est distingué.
2. En déduire que tout groupe fini d'ordre pq, avec p, q deux nombres premiers, n'est pas simple.

Exercice 4. ***(Formule de Burnside et applications)***
Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. Pour tout $g \in G$, on note $f(g)$ le nombre de points fixes de g dans X, et N le nombre d'orbites de l'action.

1. Montrer la formule de Burnside :
$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g).$$
2. Si l'action est transitive et $|X| \geq 2$, montrer qu'il existe un $g \in G$ agissant sans point fixe.
3. En déduire qu'un groupe fini n'est jamais l'union des conjugués d'un sous-groupe strict.

Exercice 5. ***(Invariants)***
Un *invariant* pour l'action de G sur X est une application $f : X \to Y$ qui est constante sur les orbites de cette action, c'est-à-dire telle que $\forall g \in G,\ x \in X, \quad f(g \cdot x) = f(x)$.

Un invariant est dit *total* si les fibres de f sont exactement les orbites de l'action de G sur X, autrement dit si $\forall x, x' \in X, (f(x) = f(x') \iff \exists g \in G, g.x = x')$.

1. Donner autant que possible d'exemples pertinents d'invariants pour les actions :
   — par équivalence des matrices ;
   — par conjugaison des matrices carrées ;
   — par congruence des matrices symétriques réelles ;
   — par automorphismes des sous-espaces d'un espace vectoriel fixé.
2. Parmi eux, lesquels sont des invariants totaux ?

Exercice 6. ***(Théorème de Cauchy)***
Soit G un groupe fini de cardinal divisible par un certain nombre premier p. On considère l'ensemble

$$E = \Big\{ (g_i)_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \in G^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \Big| \prod_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} g_i = 1 \Big\},$$

et l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur E définie par $j \cdot (g_i)_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} = (g_{i+j})_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$.

1. Montrer que E est de cardinal $|G|^{p-1}$, et que les points fixes de E pour l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont les $(g, \cdots, g)$ avec $g \in G$ tel que $g^p = 1$.
2. En déduire que G admet un élément d'ordre exactement p.

Exercice 7. ***(p-groupes)***
Soit G un p-groupe fini agissant sur un ensemble fini X.

1. Montrer que $|X^G| \equiv |X| \mod p$.
2. Montrer que le centre $\mathcal{Z}(G)$ de G est non trivial. En déduire que si $|G| = p^2$, alors G est abélien. Est-ce également vrai si $|G| = p^3$?
3. Montrer que G admet des sous-groupes distingués d'ordre d pour tout diviseur d de $|G|$. Donner un contre-exemple si G n'est pas un p-groupe.

Problèmes

Exercice 8. ***(Automorphismes de $\mathfrak{S}_n$)***
On se propose de montrer que si $n \neq 6$, alors tout automorphisme de $\mathfrak{S}_n$ est intérieur. Soit donc φ un automorphisme de $\mathfrak{S}_n$.

1. Traiter les cas $n \leq 3$.
2. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et k_i le nombre de cycles de longueur i dans sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints. On note $\mathcal{Z}(\sigma)$ le centralisateur de σ. Montrer que $|\mathcal{Z}(\sigma)| = \prod_{i=1}^{n} k_i! i^{k_i}$.
3. Soit τ une transposition. Montrer que $\varphi(\tau)$ est un produit de $d \geq 1$ transpositions à supports disjoints.
4. Montrer que $d = 1$ ou que $d = 3$ et $n = 6$.
5. On suppose désormais que $n \neq 6$ et $n \geq 4$. On note $\tau_i = (1\ i)$.
   (a) Soit $1 < i < j$. Montrer que $\varphi(\tau_i)$ et $\varphi(\tau_j)$ ont exactement un élément commun dans leur support. On note α_1 l'élément commun aux supports de $\varphi(\tau_2)$ et $\varphi(\tau_3)$.
   (b) Montrer que α_1 est dans le support de $\varphi(\tau_i)$ pour tout i. On note alors $(\alpha_1\ \alpha_i)$ le support de $\varphi(\tau_i)$.
   (c) Montrer que $\alpha : i \mapsto \alpha_i$ est une permutation.
   (d) Conclure.

Exercice 9. ***(Théorèmes de Sylow et applications)***
Soit G un groupe fini d'ordre n et p un nombre premier. Soit $\alpha, m \in \mathbb{N}^*$ des entiers tels que $n = p^\alpha m$ et p ne divise pas m. On note $\mathrm{Syl}_p(G)$ l'ensemble des sous-groupes de G d'ordre p^α et $N_p(G) \in \mathbb{N}$ le cardinal de cet ensemble fini. Les éléments de $\mathrm{Syl}_p(G)$ sont appelés les *p-sous-groupes de Sylow* de G et les théorèmes de Sylow sont les suivants :

(i) $N_p(G) \neq 0$;

(ii) les p-sous-groupes de Sylow sont conjugués par des éléments de G ;

(iii) $N_p(G) \equiv 1 \mod p$ et que $N_p(G)$ divise m.

1. On suppose que $\mathrm{Syl}_p(G)$ est non vide et on note S l'un de ses éléments. Soit H un sous-groupe de G. On considère l'action de H sur G/S par translation à gauche.
   (a) Montrer qu'il existe une orbite de cardinal premier à p.
   Indication : on pourra remarquer que G/S est de cardinal m premier à p.
   (b) En déduire qu'il existe un élément $a \in G$ tel que $aSa^{-1} \cap H \in \mathrm{Syl}_p(H)$.
   (c) En déduire (ii) : deux sous-groupes $S_1, S_2 \in \mathrm{Syl}_p(G)$ sont conjugués par un élément de G.
2. Calculer l'ordre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ et montrer que $N_p\left(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)\right) \geq 1$.
3. En déduire (i) : $N_p(G) \geq 1$.
4. Soit $S_0 \in \mathrm{Syl}_p(G)$, ce qui existe par la question précédente. On considère l'action de S_0 sur $\mathrm{Syl}_p(G)$ par conjugaison.
   (a) Montrer que cette action admet $S_0 \in \mathrm{Syl}_p(G)$ comme uniique point fixe.
   Indication : on pourra considérer T un point fixe, $N = \langle S_0, T \rangle$ et montrer que T et S_0 sont conjugués dans N.
   (b) En déduire (iii) : $N_p(G) \equiv 1 \mod p$ et que $N_p(G)$ divise m.

Voici quelques applications des théorèmes de Sylow.

5. Montrer qu'un groupe de cardinal 24 ne peut pas être simple.
6. Montrer qu'un groupe d'ordre pqr avec $p < q < r$ premiers distincts n'est pas simple.
7. Montrer que $\mathfrak{A}_5$ est le seul groupe simple d'ordre 60.
8. Soit $p < q$ deux nombres premiers distincts et G un groupe d'ordre pq. Montrer que
   (a) si $q \not\equiv 1 \mod p$, alors $G \simeq \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$;
   (b) si $q \equiv 1 \mod p$, alors $G \simeq \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ ou $G \simeq \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
   Indication : on pourra considérer un morphisme $\sigma : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$.

Exercice 10. ***(Groupes finis d'ordre n premier à $\varphi(n)$)***
On va montrer par récurrence que si G est un groupe d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ premier avec $\varphi(n)$, alors G est cyclique. Ceci est trivialement vrai pour $n = 1$. Supposons le vrai pour tous les entiers inférieurs à $n - 1$ et donnons-nous un groupe G d'ordre n premier à $\varphi(n)$.

1. Montrer que tout sous-groupe propre de G est cyclique.
2. En déduire que G admet un sous-groupe propre distingué qu'on notera H.
3. Montrer que l'image du morphisme $\begin{array}{ccc} G & \to & \mathrm{Aut}(H) \\ g & \mapsto & (h \mapsto ghg^{-1}) \end{array}$ est triviale.
4. En déduire que $H \subset \mathcal{Z}(G)$.
5. Conclure.

Exercice 11. ***(Groupe fini dont tout sous-groupe est abélien)***
Soit G un groupe fini simple. On suppose que tout sous-groupe propre de G est abélien.

1. Montrer que si H est un sous-groupe propre maximal de G alors le nombre de conjugués à H dans G est $\frac{|G|}{|H|}$.
   Indication : Montrer que H est son propre normalisateur.
2. Montrer que l'intersection de deux sous-groupes propres maximaux distincts est triviale.
   Indication : si $x \in H$ avec H maximal, on montre que H est le centralisateur de x.
3. Montrer que la réunion des conjugués de deux sous-groupes propres maximaux distincts contient plus de $|G|$ éléments.
4. En déduire que G est abélien.

Exercice 12. ***(Sous-groupes finis de*** $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$***)***
Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ d'ordre $n > 1$. Soit $P = \left\{x \in \mathbb{S}^2,\ \exists g \in G \setminus \{1\}\ g(x) = x\right\}$, c'est-à-dire l'ensemble des points de la sphère unité qui sont sur les axes des rotations $g \in G$.

1. Montrer que G agit naturellement sur P et que le nombre d'orbites est $d = \frac{|P|+2(n-1)}{n} \in \{2, 3\}$.
2. Montrer que si $d = 2$, alors G est un sous-groupe fini de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. En déduire que G est cyclique.
3. On suppose que $d = 3$ et on note $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ les cardinaux des stabilisateurs de ces $d = 3$ orbites.
   (a) Montrer que $1 + \frac{2}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$.
   (b) Montrer que $n_1 = 2$ et que $n_2 \in \{2, 3\}$.
   (c) Montrer que si $n_2 = 2$, alors G admet un sous-groupe cyclique d'ordre $\frac{n}{2}$. En déduire qu'alors G est un groupe diédral.
   (d) On suppose que $n_2 = 3$. Montrer que $n_3 \in \{3, 4, 5\}$ et calculer les valeur correspondantes pour n.
      i. Montrer que si $n_3 = 3$, alors $G \simeq \mathfrak{A}_4$.
      Indication : en considérant l'action de G *sur une orbite à* 4 *éléments, montrer que* G *s'injecte dans* $\mathfrak{S}_4$.
      ii. Montrer que si $n_3 = 4$, alors $G \simeq \mathfrak{S}_4$.
      Indication : en notant $\pm x_1, \ldots, \pm x_4$ *les points de l'orbite à* 8 *éléments, montrer que* G *permute les paires* $(x_i, -x_i)$.
      iii. Montrer que si $n_3 = 5$, alors $G \simeq \mathfrak{A}_5$.
      Indication : amusez-vous bien !

Exercice 13. ***(Sous-groupe de Frattini d'un*** p***-groupe fini)***
Soit G un p-groupe fini. On appelle *sous-groupe de Frattini* de G, noté $\Phi(G)$, l'intersection des sous-groupes propres maximaux de G.

1. Que dire de $\Phi\left(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\right)$? de $\Phi\left((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n\right)$?
2. Soit H un sous-groupe propre de G. Montrer que le normalisateur de H contient strictement H.
   Indication : faire agir H *par conjugaison sur l'ensemble* X *des conjugués de* H *dans* G *distincts de* H *et raisonner sur* $|X| \mod p$.
3. En déduire que si H est un sous-groupe propre maximal de G, alors H est distingué et $G/H \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
4. On note $G^p[G, G]$ le sous-groupe de G engendré par les puissances p-èmes et les commutateurs d'éléments de G.
   (a) Montrer que $G^p[G, G] \subset \Phi(G)$.
   (b) Montrer que $G/G^p[G, G]$ est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel.
   (c) Montrer que la surjection naturelle $G/G^p[G, G] \to G/\Phi(G)$ est un isomorphisme.
   (d) En déduire que $\Phi(G) = G^p[G, G]$.
5. Montrer que $\dim_{\mathbb{F}_p}(G/\Phi(G))$ est le nombre minimal de générateurs de G.