ÉNS de Lyon
M2 FEADEP

Cours d'algèbre
2018-2019

Feuille d'exercices n°6 : Groupes linéaires

Dans toute cette feuille K est un corps et E est un K-espace vectoriel de dimension finie.

À faire

Exercice 1. ***(Dilatations)***
On suppose que le corps K contient au moins 3 éléments. Soit H un hyperplan de E. Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $u_H = \mathrm{id}_H$.

1. Montrer que s'équivalent :
   (i) $\det(u) \neq 1$;
   (ii) u est diagonalisable et admet une valeur propre $\lambda \neq 1$;
   (iii) $\mathrm{im}(u - \mathrm{id}) \not\subset H$;
   (iv) il existe $\lambda \in K \setminus \{0,1\}$ et une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$.
2. Justifier que u est une dilatation et préciser la droite D qui lui est associée.

Exercice 2. ***(Transvections)***
Soit $f \in E^* \setminus \{0\}$ une forme linéaire non nulle et $H = \ker f$ l'hyperplan associé. Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $u_H = \mathrm{id}_H$ et $u \neq \mathrm{id}_E$.

1. Montrer que s'équivalent :
   (i) $\det u = 1$;
   (ii) u n'est pas diagonalisable ;
   (iii) $D = \mathrm{im}(u - \mathrm{id}_E) \subset H$;
   (iv) l'endomorphisme induit $u_{E/H} : E/H \to E/H$ est l'identité $\mathrm{id}_{E/H}$;
   (v) il existe un vecteur non nul $a \in H \setminus \{0\}$ tel que $\forall x \in E,\ u(x) = x + f(x)a$;
   (vi) il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$.
2. Justifier que u est une transvection et identifier ses paramètres dans les précédentes descriptions.

Exercice 3. ***(Caractérisation duale des transvections)***
Soit D une droit de E. On note $V(D)$ l'ensemble des transvections $u \in \mathrm{GL}(E)$ telles que $D = \mathrm{im}(u - \mathrm{id}_E)$ et $U(D) = V(D) \cup \{\mathrm{id_E}\}$.

1. Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$. Montrer que s'équivalent :
   (i) $u \in U(D)$;
   (ii) $u_D = \mathrm{id}_D$ et l'endomorphisme induit $u_{E/D} : E/D \to E/D$ est l'identité $\mathrm{id}_{E/D}$.
2. Montrer que $U(D)$ est un groupe commutatif isomorphe à $(K^{n-1}, +)$.
3. Calculer les sous-groupes conjugués à $U(D)$ et le normalisateur de $U(D)$ dans $\mathrm{GL}(E)$.

Exercice 4. Soit H un hyperplan de E, soit D une droite de E, soit $\lambda \in K^*$ et $g \in \mathrm{GL}(E)$ un endomorphisme inversible. Montrer que si $h \in \mathrm{GL}(E)$ est une transvection (resp. dilatation) d'hyperplan H, de droite D (resp. et de rapport λ), alors ghg^{-1} est une transvection (resp. dilatation) d'hyperplan $g(H)$, de droite $g(D)$ (resp. et de rapport λ).

Exercice 5. Soit $r \in [\![1, n]\!]$ et $g \in \mathrm{GL}(E)$ un endomorphisme inversible laissant stable tous les sous-espace de E de dimension r. Montrer que g est une homothétie.

Exercice 6. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang $r \in [\![0, n-1]\!]$ est connexe par arcs.

Exercice 7. ***(Résultats de conjugaison)***
Démontrer les résultats suivants :

1. Les transvections dans $\mathrm{GL}(E)$ sont deux à deux conjuguées.
2. Deux dilatations de $\mathrm{GL}(E)$ sont conjuguées si, et seulement si, elles ont même rapport.
3. **Si** $\dim E \geq 3$, alors les transvections dans $\mathrm{SL}(E)$ sont deux à deux conjuguées.
4. Dans $\mathrm{SL}_2(K)$, toute transvection est conjuguée à $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour un certain $\lambda \in K^*$.
5. Dans $\mathrm{SL}_2(K)$, les matrices $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont conjuguées si, et seulement si, le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ est un carré dans $K^\times$.

Exercice 8. Soit $n, q \in \mathbb{N}^*$ tels que q est la puissance d'un certain nombre premier. Exprimer en fonction de n et q les cardinaux des groupes suivants :

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q) \qquad \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q) \qquad \mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q) \qquad \mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$$

Indication : On pourra montrer que si $d = \mathrm{pgcd}(n, q-1)$*, alors* $\mu_n(\mathbb{F}_q) = \mu_d(\mathbb{F}_q)$.

Exercice 9. ***(p-Sylow des groupes linéaires finis)***
Soit $n, q \in \mathbb{N}^*$ tels que q est la puissance d'un nombre premier p.

1. Montrer que les p-Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ sont trigonalisables, c'est-à-dire qu'il existe une base commune de trigonalisation et que $(X-1)^n$ est le polynôme caractéristique de tout élément d'un p-Sylow.
2. Quel est le nombre d'hyperplans dans $\mathbb{F}_q^n$?
3. On appelle *drapeau complet* d'un espace vectoriel E de dimension n une suite strictement croissante d'espaces vectoriels $F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n = E$. Combien y a-t-il de drapeaux complets dans $\mathbb{F}_q^n$?
4. En déduire le nombre de p-Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.
5. Quel est le cardinal du normalisateur d'un p-Sylow ?
6. Retrouver le nombre de p-Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.

Problèmes

Exercice 10. ***(Groupe dérivé)***
On se propose de calculer le groupe dérivé de $\mathrm{SL}_n(K)$ lorsque $n \geq 3$ et $k = \mathrm{Card}\, K \geq 3$, où la notation $\mathrm{Card}\, X \geq m$ signifie que l'ensemble X contient au moins $m \in \mathbb{N}^*$ éléments distincts.

1. On suppose que $n \geq 3$ et $\mathrm{Card}\, K \geq 3$, montrer que toute transvection t s'écrit comme un commutateur $t = [v, t]$ avec $v \in \mathrm{SL}_n(K)$.
2. On suppose que $n = 2$ et $\mathrm{Card}\, K \geq 4$. Soit $\lambda \in K \setminus \{-1, 0, 1\}$. En considérant les éléments $s = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$ et $t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, montrer que toute transvection s'écrit comme un commutateur dans $\mathrm{SL}_2(K)$.
3. On suppose que $n \geq 3$ et $\mathrm{Card}\, K = 2$. Soit $\lambda \in K \setminus \{-1, 0, 1\}$. En considérant les éléments $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, montrer que toute transvection s'écrit comme un commutateur dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_2)$.
4. Conclure que si $n \geq 3$ ou $\mathrm{Card}\, K \geq 4$, alors $\mathcal{D}(\mathrm{SL}_n(K)) = \mathrm{SL}_n(K)$.
5. Montrer que si $n \geq 3$ ou $\mathrm{Card}\, K \geq 4$, alors $\mathcal{D}(\mathrm{GL}_n(K)) = \mathrm{SL}_n(K)$.
6. Traiter les cas restants ou regarder les exercices suivants.

Exercice 11. ***(Simplicité des*** $\mathrm{PSL}_n(K)$ ***lorsque*** $n \geq 3$***)***
On suppose que $n \geq 3$ et K est un corps quelconque. Soit $E = K^n$. Soit N un sous-groupe distingué de $\mathrm{SL}_n(K)$ contenant le centre Z de $\mathrm{SL}_n(K)$. On suppose que $N \neq Z$.

1. Soit $\sigma \in N \setminus Z$. Justifier l'existence d'un vecteur $a \in E$ tel que la famille $(a, \sigma(a))$ est libre.
2. Soit $\tau \in \mathrm{SL}_n(K)$ une transvection de droite Ka et $\rho = [\sigma, \tau]$. Montrer que $\rho \in N \setminus \{\mathrm{id}_E\}$.
3. Soit H un hyperplan de E contenant a et $\sigma(a)$. Montrer que $\mathrm{im}(\rho - \mathrm{id}_E) \subset H$ et que H est ρ-stable.
4. On suppose qu'il existe une transvection $\tau' \in \mathrm{SL}_n(K)$ d'hyperplan H qui ne commute pas à ρ. Montrer que $[\rho, \tau']$ est une transvection de $\mathrm{SL}_n(K)$ qui est un élément de N.
5. On suppose que ρ commute à toutes les transvections d'hyperplan H. Montrer que ρ est une transvection.
6. Justifier que N contient nécessairement une transvection.
7. En déduire que $N = \mathrm{SL}_n(K)$.
8. Conclure que $\mathrm{PSL}_n(K)$ est simple.
9. Contempler la simplicité des $\mathrm{PSL}_2(K)$ lorsque $\mathrm{Card}(K) \geq 4$ (par exemple dans le livre de D. Perrin, *Cours d'algèbre*).

Exercice 12. ***(Application : Sous-groupes distingués de*** $\mathrm{SL}_n(K)$***)***
Soit $n \geq 3$ et $\pi : \mathrm{SL}_n(K) \to \mathrm{PSL}_n(K)$ la projection canonique. Soit H un sous-groupe de $\mathrm{SL}_n(K)$.

1. Montrer que le centre de $\mathrm{SL}_n(K)$ est cyclique.
2. Montrer que si $\pi(H) = \mathrm{PSL}_n(K)$, alors H contient une transvection.
3. En déduire que tout sous-groupe strict et distingué de $\mathrm{SL}_n(K)$ est cyclique.

Exercice 13. ***(Isomorphismes exceptionnels pour*** $q \neq 3$***)***
Soit q une puissance d'un nombre premier p.

1. En faisant agir $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$, montrer qu'il existe un morphisme injectif $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q) \to \mathfrak{S}_{q+1}$.
2. En déduire que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$.
3. Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathfrak{A}_5$.
4. Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{S}_5$ et que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{A}_5$.

Exercice 14. ***(Isomorphismes exceptionnels pour*** $q = 3$***)***
On prend $q = 3$.

1. Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$ et que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$.
2. Montrer que le groupe dérivé de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$ est isomorphe au groupe de Klein $K \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.
3. En déduire l'existence d'un morphisme surjectif $\mathcal{D}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)) \to K$ et d'un morphisme surjectif $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) \to \mathbb{F}_3$.
4. Décrire les éléments d'ordre 2 de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$.
5. En déduire que $\mathcal{D}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)) \simeq H_8$ où H_8 désigne le groupe des quaternions.
6. Conclure que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq H_8 \rtimes \mathbb{F}_3$.
7. Décrire les éléments divisant 4 de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ et montrer qu'ils forment un sous-groupe H de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ dont on précisera l'ordre.
8. Quels sont les 2-Sylow de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$?
9. Vérifier que les éléments suivants :
$$i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad j = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad k = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$
sont dans H et que $\langle i, j, k \rangle \simeq H_8$.
10. En déduire que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ n'est pas le produit direct de H_8 et $\mathbb{F}_3$.

Exercice 15. ***(Sous-groupes compacts de*** $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$***)***
Soit V un espace euclidien et G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(V)$. Soit H un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$.

1. Soit C un compact convexe non vide contenu dans V stable par l'action de G. Construire une norme $\|\cdot\|$ sur V qui est G-invariante et telle que pour tous $x \neq y$ dans V, on a :
$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 < \frac{\|x\|^2+\|y\|^2}{2}$$
2. En déduire que G fixe un point de C.
3. On prend $V = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices symétriques muni de sa structure usuelle d'espace euclidien et on définit :
$$\begin{array}{cccc} \Phi : & G & \to & \mathrm{GL}\left(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\right) \\ & g & \mapsto & (A \mapsto gAg^t) \end{array}.$$
Vérifier que Φ est un morphisme de groupe.
4. Montrer que $\Phi(H)$ laisse stable l'enveloppe convexe C de l'ensemble $\{hh^t,\ h \in H\}$.
5. En déduire que H est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 16. ***(Un isomorphisme remarquable)***
Soit $E = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 2 réelles de trace nulle.

1. Justifier que E est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.
2. Définir une action naturelle de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur E et en déduire un morphisme de groupes $\alpha : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.
3. Soit $\begin{array}{cccc} q : & E & \to & \mathbb{R} \\ & M & \mapsto & \det M \end{array}$. Montrer que q est une forme quadratique sur E et que $\mathrm{im}(\alpha) \subset \mathcal{O}(q)$.
4. En déduire un morphisme injectif $\beta : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{O}(q)$
5. Montrer que l'image du morphisme β est un ouvert fermé de $\mathcal{O}(q)$.
Indication : On pourra appliquer le théorème d'inversion locale.
6. En déduire que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est isomorphe à la composante neutre de $\mathcal{O}(q)$.

Pour aller plus loin

Exercice 17. ***(Décomposition de Bruhat)***
On rappelle qu'un *drapeau complet* $\underline{F}$ d'un espace vectoriel E de dimension n une suite strictement croissante d'espaces vectoriels $F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n = E$.

1. Soit $\underline{V}$ et $\underline{W}$ deux drapeaux complets de $E = K^n$. On pose $U_{i,j} = V_j + W_i$ et $U_{i,0} = 0$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $s(i) = \inf\{j \in [\![1, n]\!],\ U_{i,j} = U_{i,j-1}\}$.
   (a) Exhiber l'existence d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on ait :
   $$W_i = W_{i-1} \oplus Ke_i \qquad \text{et} \qquad V_{s(i)} = V_{s(i)-1} \oplus Ke_i$$
   (b) Montrer que $s \in \mathfrak{S}_n$.
   (c) On dit qu'une base $\mathcal{B}$ est adaptée à $(\underline{V}, \underline{W})$ si les V_i et les W_j sont engendrés par des parties de $\mathcal{B}$. Montrer qu'il existe toujours une base adaptée à deux drapeaux complets.
2. Soit Δ l'ensemble des couples de drapeaux complets de E. Combien l'action de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur Δ admet-elle d'orbites ?
3. Déduire des questions précédentes la décomposition de Bruhat $\mathrm{GL}_n(K) = BWB$ où W est le groupe des matrices de permutation et B est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$ formé des matrices triangulaires supérieures.