Valuations ; Congruences ; Complétion p-adique de $\mathbb{Q}$

Dans toute la suite, p est un nombre premier.

Exercice 1. Dans une écriture en base 10, par combien de zéros le nombre 2019! se termine-t-il ?

Exercice 2. Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose que m est premier à p. Montrer que $\binom{np}{m} \equiv 0 \mod p$.
2. On suppose que $m \leq n$. Montrer que $\binom{np}{mp} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p(n-1)}{pm-k}\binom{p}{k}$.
   Indication : on pourra considérer $(X+Y)^{np} \in \mathbb{Z}[X,Y]$.
3. En déduire que $\binom{np}{mp} \equiv \binom{n}{m} \mod p^2$.

Exercice 3. Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$ tels que $a_1 + \dots + a_n = 0$. Montrer qu'il existe $i \neq j$ tels que $|a_i|_p = |a_j|_p$.

Exercice 4.(Théorème de Wolstenholme) On suppose que $p \geq 5$.

1. Montrer que $\binom{p-1}{k-1} \equiv \pm 1 \mod p$ et que $\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^2 \equiv 0 \mod p$.
2. Montrer que $\mathrm{val}_p\left(\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k}\right) \geq 2$ et que $\mathrm{val}_p\left(\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2}\right) \geq 1$.
   Indication : on pourra se ramener à une étude dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ *et considérer un changement de variable de la forme* $k \mapsto k^{-1}$.
3. En déduire l'identité $\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 \mod p^3$. Remarquer que l'hypothèse $p \geq 5$ était bien nécessaire. *

Exercice 5. On se propose voir que si $p \in \{2,3\}$, l'identité $\binom{np}{mp} \equiv \binom{n}{m} \mod p^3$ n'est pas vérifiée une infinité de fois. Plus précisément :

1. Montrer que $\binom{3n}{3} \equiv n \mod 27$ si, et seulement si, $n \not\equiv 2 \mod 3$.
2. Montrer que $\binom{2n}{2} \equiv n \mod 8 \iff \binom{n}{2}$ est pair $\iff n \equiv 0$ ou $1 \mod 4$.

Exercice 6.

1. Soient $x, y \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $x \equiv y \mod p^n$, alors $x^p \equiv y^p \mod p^{n+1}$ et en déduire que si $x \equiv y \mod p$, alors $x^{p^n} \equiv y^{p^n} \mod p^{n+1}$.
2. Soit $x \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $x^{p^{n+1}} \equiv x^{p^n} \mod p^n$.
3. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, la suite $(a^{p^n})_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ pour la norme $|\cdot|_p$.
4. Supposons que cette suite admette une limite $l \in \mathbb{Q}$ pour $|\cdot|_p$. Montrer que $l^p = l$.
5. En déduire que si $p \geq 5$, alors $\mathbb{Q}$ n'est pas complet pour $|\cdot|_p$.
   Indication : on pourra prendre $a \in [\![2, p-2]\!]$.

$*$. En fait, on dispose de l'énoncé plus général, dû à Jacobsthal, suivant : $\binom{np}{mp} \equiv \binom{n}{m} \mod p^3$.

Exercice 7. On note $|\cdot|_\infty$ la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{Q}$. Soit $a \in \mathbb{Q}^\times$.

1. Montrer que l'ensemble des p premiers tels que $|a|_p \neq 1$ est fini.
2. Montrer que $\displaystyle\prod_{p \text{ premier}} |a|_p = \frac{1}{|a|_\infty}$.
3. Montrer que $a \in \mathbb{Z}$ si, et seulement si, pour tout p premier, on a $|a|_p \leq 1$.

Exercice 8. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers relatifs. Montrer qu'il existe une sous-suite de (a_n) qui est de Cauchy pour $|\cdot|_p$.