ÉNS de Lyon | Prémaster – Nombres p-adiques
TD2 | 2018–2019

Propriétés topologiques de $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{Z}_p$; Écriture en base p

Dans toute la suite, p est un nombre premier. Pour tout réel $r > 0$ et tout nombre p-adique $a \in \mathbb{Q}_p$, on notera $B(a,r) = \{x \in \mathbb{Q}_p,\ |a-x|_p < r\}$ et $BF(a,r) = \{x \in \mathbb{Q}_p,\ |a-x|_p \leqslant r\}$.

Exercice 1. Soient $a \in \mathbb{Q}_p$ et $r > 0$.

1. Montrer que la « sphère » $S(a,r) = \{x \in \mathbb{Q}_p\ ,\ |x-a|_p = r\}$ est un ouvert-fermé de $\mathbb{Q}_p$. Pour quelles valeurs de r est-elle non vide ?
2. Déterminer la frontière $\partial B(a,r) = \overline{B(a,r)} \setminus \overset{\circ}{B}(a,r)$ de la boule ouverte de centre a de rayon r.
3. Déterminer la composante connexe de a.

Exercice 2. Soient $a, b \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{Z}_p$.
2. On pose $a+b\mathbb{N} = \{a+bn\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que l'adhérence de cette partie dans $\mathbb{Q}_p$ est $BF(a, |b|_p)$.
3. En déduire que $a + b\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{Z}_p$ si, et seulement si, b est premier à p.

Exercice 3. On définit l'espace de Cantor comme l'espace produit $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ où l'ensemble fini $\{0,1\}$ est muni de la topologie discrète.

1. Montrer que $\mathbb{Z}_2$ est homéomorphe à l'espace de Cantor.
2. Plus généralement, montrer que $\mathbb{Z}_p$ est homéomorphe à l'espace de Cantor.

Exercice 4. Soit $x \in \mathbb{Z}_p$ d'écriture $\sum_{i\geq 0} a_i p^i$ en base p.

1. Quelle est l'écriture en base p de $-x$?
2. À quelle condition, nécessaire et suffisante, sur la suite $(a_i)_{i\geq 0}$ a-t-on $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$? $x \in \mathbb{Z}_{<0}$?
3. Montrer que $x \in \mathbb{Q}$ si, et seulement si, la suite $(a_i)_{i\geq 0}$ est périodique à partir d'un certain rang.
4. On suppose $p \neq 2$. Quelle est l'écriture en base p de $\frac{1}{2}$?

Exercice 5. On considère la série $\sum \binom{1/2}{n} \left(\frac{7}{9}\right)^n$ dont les sommes partielles sont dans $\mathbb{Q}$, où on pose $\binom{1/2}{n} = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - k\right) \in \mathbb{Q}^\times$.

1. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, on a $\displaystyle\sum_{\substack{i,j\in\mathbb{N} \\ i+j=k}} \binom{1/2}{i}\binom{1/2}{j} = 0$.
2. Montrer que la série converge dans $\mathbb{R}$. Quelle est sa limite ?
3. Montrer que la série converge dans $\mathbb{Q}_7$. Quelle est sa limite ?

Exercice 6. Soit $x \in \mathbb{Z}_p$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite d'entiers $b_n \in [\![0, p-1]\!]$ tels que $x = \displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n(-p)^n$.
2. Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang si, et seulement si, $x \in \mathbb{Z}$.

Exercice 7. Soit $f = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{Q}_p[X]$. On pose $M = \max(1, |a_1|_p, \ldots, |a_n|_p)$. Montrer que l'ensemble des racines de f est contenu dans la boule fermée de centre 0 et de rayon M.

Exercice 8. On munit l'ensemble $\mathbb{Z}_p$ de la topologie induite par la valeur absolue p-adique et l'ensemble $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ de sa topologie discrète. Montrer que l'application $\pi_n : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ est continue.

Exercice 9. Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{Q}_p$.

1. On suppose $p \geq 3$. Soit $m \in \mathbb{Z}$ tel que le polynôme $X^2 - m$ ait ses racines dans $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On suppose que $p \nmid m$.
   (a) Montrer qu'il existe des entiers $\alpha_k \in [\![0, p-1]\!]$ tels que les entiers $x_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k p^k$ vérifient $x_n^2 \equiv m \mod p^n$.
   (b) Pourquoi $\mathbb{Q}$ n'est-il pas complet pour $|\cdot|_3$?
2. Existe-t-il $x \in \mathbb{Q}_2$ tel que $x^2 = 3$?