Fonctions continues et différentiables sur $\mathbb{Z}_p$

Dans toute la suite, p désignera un nombre premier.

Exercice 1. Dans cet exercice, on suppose $p = 2$.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction continue $f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Q}_2$ telle que
$$\forall x \in \mathbb{Z},\ f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair,} \\ \frac{x-1}{2} & \text{si } x \text{ est impair.} \end{cases}$$
2. Montrer qu'il existe une unique fonction continue $g : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Q}_2$ telle que $\forall x \in \mathbb{Z},\ g(x) = (-1)^x$ et déterminer les coefficients du développement de Mahler de g.
3. En déduire les coefficients du développement de Mahler de f.

Exercice 2. On suppose $p \geq 3$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application
$$\begin{array}{ccc} (p^n\mathbb{Z}_p, +) & \to & \left(1 + p^{n+1}\mathbb{Z}_p, \times\right) \\ a & \mapsto & (1+p)^a \end{array}$$
est un isomorphisme de groupes continu et rappeler pourquoi $1 + p\mathbb{Z}_p$ est topologiquement cyclique, c'est-à-dire qu'il contient un sous-groupe monogène dense.
2. Montrer que les sous-groupes fermés de $1 + p\mathbb{Z}_p$ sont exactement le groupe trivial et les $1 + p^n\mathbb{Z}_p$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire que $\mathbb{Z}_p^\times$ est topologiquement cyclique.

Exercice 3. (Formule combinatoire utilisée dans la démonstration du théorème de Mahler) Pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$, on définit $\Delta f\ :\ x \mapsto f(x+1) - f(x) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$a_n(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k)$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\Delta^n = \Delta \circ \cdots \circ \Delta$ composée n fois. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$, on a :
$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k)$$
2. Montrer que
$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} \binom{j}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in [\![0, m-1]\!] \\ (-1)^k & \text{si } k = m \end{cases}$$
3. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{Z}_p$, on a $\displaystyle\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \Delta^j f(x-m) = f(x)$.
4. En déduire que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, on a l'égalité :
$$\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a_{n+j}(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k+m)$$

Exercice 4.

1. Justifier que toute fonction continue $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ est bornée.
2. Calculer $\|f\|_\infty$ pour $x \mapsto \binom{px}{n}$ et $x \mapsto x^p - x$.

Exercice 5. (Un contre-exemple au lemme de Rolle)
Trouver un exemple de fonction $f \in \mathbb{C}^1(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ et de deux éléments $a, b \in \mathbb{Z}_p$ tels que $f(a) = f(b) = 0$ mais pour tout $t \in \mathbb{Z}_p$, on ait $f'(at + b(1-t)) \neq 0$.

Exercice 6. (Fonctions lipschitziennes – Examen 2018)
Si $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ est une fonction continue, on note $a_n(f) \in \mathbb{Z}_p$ les coefficients de son développement de Mahler :

$$f(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n(f) \binom{x}{n}.$$

Pour tout $y \in \mathbb{Z}_p$, on définit une fonction $f_y : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ par $f_y(x) = f(x+y)$.

1. Montrer que $a_\ell(f_y) = \sum_{k \geqslant 0} a_{k+\ell}(f) \binom{y}{k}$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que si $k \in \mathbb{N}^*$, alors $|k|_p \geqslant \frac{1}{k}$.
3. En écrivant par exemple $\binom{y}{k} = \frac{y}{k}\binom{y-1}{k-1}$ pour $y \in \mathbb{Z}_p$ et $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que si la suite $\Big(n\, |a_n(f)|_p\Big)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors la fonction f est lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}_+$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{Z}_p$, on a $|f(y) - f(x)|_p \leqslant \lambda\, |y - x|_p$.

Exercice 7. Dans cet exercice, on suppose que $p = 2$.

1. Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_2 & \to & 1 + 4\mathbb{Z}_2 \\ a & \mapsto & (1+4)^a \end{array}$ est un isomorphisme continu entre les groupes $(\mathbb{Z}_2, +)$ et $(1 + 4\mathbb{Z}_2, \times)$ et en déduire que $1 + 4\mathbb{Z}_2$ est topologiquement cyclique.
2. Quels sont les sous-groupes fermés de $1 + 4\mathbb{Z}_2$?
3. Le groupe $\mathbb{Z}_2^\times$ est-il topologiquement cyclique ?

Exercice 8. (Formule d'interpolation de Lagrange)
Soit $f = \sum_{n \geq 0} a_n(f) \binom{\cdot}{n} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$. Soit $m \in \mathbb{N}$. On pose $P_m = \prod_{i=0}^{m-1} (X - i) \in \mathbb{Z}_p[X]$.

1. Pour tout $n \in [\![0, m]\!]$, on pose $L_{m,n} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq n}}^{m} \frac{X - i}{n - i} \in \mathbb{Z}_p[X]$.

   Montrer que $\sum_{n=0}^{m} a_n(f) \binom{X}{n} = \sum_{n=0}^{m} f(n) L_{m,n}$.
2. En déduire que $a_m(f) = m! \sum_{i=0}^{m} f(i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{m} \frac{1}{j - i}$.

Exercice 9.

1. On suppose $p \neq 2$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $z \in p\mathbb{Z}$ et $u_n \in \mathbb{Z}$ tel que $2u_n \equiv 1 \mod p^n$. Montrer que le nombre entier $x_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2k}{k} \left(u_n^2 z\right)^k$ satisfait l'équation $(1 - z)x_n^2 \equiv 1 \mod p^n$.
2. Montrer que x_n converge dans $\mathbb{Z}_p$ vers $x = \Big(1 - z\Big)^{-\frac{1}{2}}$.
3. Montrer un résultat analogue pour $p = 2$ avec $z \equiv 0 \mod 8$.