Théorème d'Ostrowski ; prolongement de la norme p-adique

Dans toute la suite, p désignera un nombre premier.

Exercice 1.(Théorème d'Ostrowski : le cas archimédien)
Soit $|\cdot|$ une norme de corps archimédienne sur $\mathbb{Q}$ non triviale.

1. Montrer qu'il existe deux constantes $C, s \in \mathbb{R}_+^*$ telles que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on ait $|n| \leq Cn^s$.
   Indication : on pourra considérer le plus petit entier $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $|n_0| > 1$ *et poser* $s = \frac{\log |n_0|}{\log n_0}$.
2. Justifier que cette inégalité reste vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ si on prend $C = 1$.
3. Montrer qu'il existe une troisième constante $C' \in \mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on ait $|n| \geq C'n^s$.
4. En déduire que $|\cdot| = |\cdot|_\infty^s$.

Exercice 2. Soit K un corps de caractéristique $p \neq 0$. Montrer que toute norme de corps $|\cdot|$ sur K est ultramétrique.

Exercice 3.(Unicité de la norme p-adique)
Soit $|\cdot|$ une norme de corps sur $\mathbb{Q}$ telle que :

$$\forall a \in \mathbb{Q} \qquad |a|_p < 1 \Rightarrow |a| < 1$$

1. Soit $a \in \mathbb{Q}^\times$ tel que $|a|_p < 1$. On pose $\alpha = \frac{\log |a|}{\log |p|}$ et $\beta = \frac{\log |a|_p}{\log |p|_p}$. Montrer que $\alpha = \beta$.
   Indication : on pourra considérer un rationnel $r \in \mathbb{Q}$ *compris strictement entre* α *et* β.
2. Montrer qu'il existe $s \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|\cdot| = |\cdot|_p^s$ et en déduire que $|\cdot|$ et $|\cdot|_p$ sont équivalentes.
3. Soit q un nombre premier. Montrer que $|\cdot|_p$ et $|\cdot|_q$ sont équivalentes si, et seulement si, $p = q$.

Exercice 4. (Extensions quadratiques) Soit $K/\mathbb{Q}_p$ une extension de degré 2.

1. Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{Z}$ sans facteurs carrés tel que $K \simeq \mathbb{Q}_p(\sqrt{d})$.
2. Cet entier d est-il unique ?
3. Déterminer une expression de la norme de K qui étend $|\cdot|_p$.
4. On suppose $p \neq 2$. Déterminer $\mathrm{val}_p(K^\times)$ en distinguant les cas $\mathrm{val}_p(d) = 0$ et $\mathrm{val}_p(d) = 1$.
5. Qu'en est-il lorsque $p = 2$?
   Indication : on rappelle que l'ensemble des carrés de $\mathbb{Z}_2^\times$ *est* $1 + 8\mathbb{Z}_2$.

Exercice 5. Soit L une extension algébrique de $\mathbb{Q}_p$. Soit $a \in L$ algébrique sur $\mathbb{Q}_p$ de degré inférieur ou égal à m et $b \in L$ algébrique sur $\mathbb{Q}_p$ de degré inférieur ou égal à n. On pose $K = \mathbb{Q}_p(a, b)$. Que peut-on dire de $[K : \mathbb{Q}_p]$? En déduire que $a + b$ est algébrique sur $\mathbb{Q}_p$ de degré inférieur ou égal à mn.

Exercice 6. Le but de cet exercice est de donner une autre démonstration du résultat suivant :

Soit $Q \in \mathbb{Q}_p[X]$ *un polynôme de degré* $d \geq 2$. *Si* Q *est irréductible et si* $Q(0) \in \mathbb{Z}_p$, *alors* $Q \in \mathbb{Z}_p[X]$.

Soit C la matrice compagnon de Q.

1. Vérifier que $|\det(C)|_p \leq 1$ et que C n'est pas nilpotente.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un coefficient $c_{i_k,j_k} := c_k$ de C^k tel que $\|C^k\| = |c_k|_p$.
3. On suppose que la suite $\left(\|C^k\|\right)_k$ est non bornée. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{Z}_p)$ qui commute à C telle que $\|A\| = 1$ et $\det(A) = 0$.
   Indication : considérer une valeur d'adhérence de la suite C^k/c_k.
4. En déduire que $\left(\|C^k\|\right)_k$ est bornée, puis que $\|C\| = 1$.
5. Conclure.

Exercice 7. Dans cet exercice, on prend $p = 3$ et on considère le polynôme $P = X^3 - X - 1$.

1. Vérifier que P est sans racines sur $\mathbb{F}_3$.
2. Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Q}_3$.

Soit K un corps de rupture de P sur $\mathbb{Q}_3$ et α une racine de P dans K.

3. Soit $x \in K$. Calculer la matrice de $m_x : y \mapsto xy$ dans la base $(1, \alpha, \alpha^2)$.
4. En déduire une expression de la norme de corps qui étend $|\cdot|_3$ à K.
5. Déterminer $\mathrm{val}_3(\alpha)$ puis montrer que $\mathrm{val}_3(K^\times) = \mathbb{Z}$.
   Indication : pour $x \in \mathbb{Z}_3[\alpha] \setminus \{0\}$, on pourra réduire $\det m_x$ *modulo* 3 *et montrer que* $\mathrm{val}_3(x) \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. On prend $p = 11$. Soit $a = \sqrt[3]{2}$ une racine de $P = X^3 - 2$ et $b = j$ une racine de $Q = X^2 + X + 1$. On note $K = \mathbb{Q}_{11}(\sqrt[3]{2})$ et $L = K(j)$.

1. Trouver un polynôme de degré inférieur ou égal à 6 annulant $a + b$.
2. Calculer $[K : \mathbb{Q}_{11}]$ puis $[L : \mathbb{Q}_{11}]$.
3. Déterminer une expression de la norme de K qui étend $|\cdot|_{11}$ puis de celle de L.
4. Montrer que $K/\mathbb{Q}_{11}$ n'est pas galoisienne mais que $L/\mathbb{Q}_{11}$ est galoisienne.
5. Déterminer $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_{11})$.
6. Vérifier que pour tout $x \in L$, on a $|x|_p^6 = \prod_{g \in G} g(x)$.
7. Que se passe-t-il si $p = 5$? si $p = 7$?