ÉNS de Lyon
M2 FEADéP

Cours d'algèbre
2019–2020

# Extensions de corps

## Leçons directement concernées (2020)

(123) Corps finis. Applications.

(125)* Extensions de corps. Exemples et applications.

(141) Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

## Leçons liées, extensions de corps comme applications ou outil (2020)

(122)* Anneaux principaux. Applications.

(151) Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

(153) Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

(157) Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

## Leçons où des extensions de corps peuvent apparaître sporadiquement (2020)

(102)* Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

(126) Exemples d'équations en arithmétique.

(142)* PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

(144)* Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

(154)* Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

## Ce qui est dans le programme

(c) Corps, sous-corps. Caractéristique, morphisme de Frobenius. Extension de corps. Corps des fractions d'un anneau intègre. Le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Théorème de d'Alembert-Gauss. Éléments algébriques et transcendants. Extensions algébriques. Corps algébriquement clos. Corps de rupture et corps de décomposition. Corps finis.

# Bibliographie (incluant corps finis)


- J. Calais, *Extensions de corps Théorie de Galois* (2006)
- J.-C. Carréga, *Théorie des corps : La règle et le compas* (2001)
- M. Demazure, *Cours d'algèbre* (2009)
- J.-P. Escofier, *Théorie de Galois* (2000)
- I. Gozard, *Théorie de Galois* (2009)
- M. Mignotte, *Algèbre concrète* (2003)
- A. Paugam, *Questions délicates en algèbre et géométrie* (2007)
- D. Perrin, *Cours d'algèbre* (1996)
- P. Tauvel, *Corps commutatifs et théorie de Galois* (2007)

Ce polycopié présente les notions de base sur les extensions de corps et leurs applications (incluant les corps finis), allant jusqu'à la préparation de la théorie de Galois.

Tous les corps considérés seront commutatifs, et on désigne toujours par $K$ un corps de base fixé.

# 1 Extensions

## 1.1 Motivations

Pourquoi s'intéresser aux extensions de corps ?

**Pourquoi des corps plutôt que des anneaux ?** On s'intéresse naturellement aux corps comme structure algébrique de base ayant de bonnes propriétés. Par exemple, en algèbre linéaire, un module de type fini sur un corps est appelé un espace vectoriel et, dans ce cas particulier, on dispose de toute une panoplie d'algèbre linéaire bien pratique : existence de bases, de supplémentaires,...

Il existe également une théorie des extensions d'anneaux mais elle est bien plus compliquée. Citons un résultat remarquable : tout morphisme d'anneaux entre deux corps est injectif puisqu'un corps n'admet pas d'idéal strict non-trivial.

**Pourquoi des extensions ?** On pourrait se contenter de manipuler des corps. L'intérêt des extensions de corps est de pouvoir comparer les corps les uns aux autres. Une extension de corps est un moyen d'ajouter des scalaires à un problème de base pour le résoudre là où il y a suffisamment de solutions, puis on cherche à redescendre au corps de base ou à exprimer ces solutions en termes du corps de base qui nous intéressait vraiment : c'est typiquement la situation du passage du corps des nombres réels au corps des nombres complexes qui permet de simplifier bon nombre de problèmes d'analyse (penser à tout les résultats propres à l'analyse complexe).

**Extensions naturelles** On dispose de certaines extensions naturelles $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ ou encore $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Les nombres réels sont de nature algébrique différente sur $\mathbb{Q}$ : $\sqrt{2}$ est racine d'un polynôme et on peut le manipuler avec des techniques arithmétiques, ce qui n'est pas le cas du nombre $e$ ou $\pi$ par exemple.

**Ajouter une racine d'un polynôme** Lorsqu'un polynôme est irréductible, on ne peut pas découper un problème qui dépend de ce polynôme en sous-problèmes. On cherche donc une technique qui permet de réduire ce polynôme via une extension de corps. C'est typiquement ce que permettent les corps de ruptures en ajoutant une racine d'un polynôme. Attention, cela ne scinde pas nécessairement le polynôme.

**Scindage des polynômes** Comme on l'a vu en algèbre linéaire, il est souvent commode de se ramener à un endomorphisme trigonalisable. Pour qu'un endomorphisme le soit, il suffit que son polynôme caractéristique soit scindé. On va voir comment construire une extension aussi petite que possible qui scinde ce polynôme.

## 1.2 Généralités

On rappelle qu'un morphisme de corps n'est rien d'autre qu'un morphisme d'anneau $K \to L$ entre deux corps $K$ et $L$. En particulier, tout morphisme de corps est injectif.

**Définition 1.1.** Une *extension de corps* $L$ de $K$, notée $L/K$, est la donnée d'un corps $L$ et, de manière équivalente,

(i) d'un morphisme de corps $\iota : K \to L$ ;

(ii) d'une structure de $K$-espace vectoriel sur $L$.

**Exercice 1.** Vérifier l'équivalence, et pourquoi on peut toujours se ramener à $K \subset L$.

Pour faciliter les notations, on supposera souvent que $K \subset L$ où $K$ et $L$ sont vus comme ensembles. Le morphisme de corps est alors l'inclusion, et la structure de $K$-espace vectoriel est celle donnée par multiplication par les éléments de $K$ dans $L$.

Une *sous-extension de* $L/K$ est un sous-corps $M$ de $L$ contenant $K$. Autrement dit, on a deux extensions de corps $L/M/K$.

## 1.3 Degré

**Définition 1.2** (Degré)**.** L'extension $L/K$ est dite *finie* si $L$ est de dimension finie en tant que $K$-espace vectoriel, et est dite *infinie* sinon. On appelle *degré de l'extension*, noté $[L : K]$, cette dimension.

**Fait 1.3.** *Si $L/K$ est une extension finie et si $M$ en est une sous-extension, alors les extensions $L/M$ et $M/K$ sont finies.*

*Démonstration.* L'extension $M/K$ est finie car $M$ est un sous-$K$-espace vectoriel de $L$. Si $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de $L$ sur $K$, alors c'est une famille génératrice de l'espace vectoriel $L$ sur $M$. □

La réciproque de ce résultat est vraie et plus précise :

**Proposition 1.4** (Théorème de la base télescopique)**.**
*Soient $M/L$ et $L/K$ deux extensions finies. On pose $(e_i)_{i\in I}$ une $K$-base de $L$ et $(f_j)_{j\in J}$ une $L$-base de $M$. Alors, $(e_i f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une $K$-base de $M$.*
*En particulier, $M/K$ est une extension finie et $[M : K] = [M : L][L : K]$.*

*Démonstration.* Soit $m \in M$. Par hypothèse, on peut écrire $m = \sum_{j\in J} \mu_j f_j, \quad m_j \in L$.

Ensuite, par hypothèse sur $L$, pour tout $j \in J$, on peut écrire $\mu_j = \sum_{i\in I} \lambda_{i,j} e_i$.

Alors, on a $m = \sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} \lambda_{i,j} e_i f_j$, ce qui prouve que la famille $(e_i f_j)_{i,j}$ est $K$-génératrice de $M$.

Réciproquement, supposons qu'on a une telle écriture pour $m = 0$. Montrons que les $\lambda_{i,j}$ sont tous nuls. On écrit $0 = \sum_{j\in J}(\sum_{i\in I} \lambda_{i,j} e_i) f_j$. Alors, par liberté de $(f_j)_j$, pour tout $j \in J$, on a $\sum_{i\in I} \lambda_{i,j} e_i = 0$, et donc les $\lambda_{i,j}$ sont tous nuls par liberté de $(e_i)_i$. On a donc bien prouvé que notre famille est une $K$-base, et le reste en découle directement. □

*Exemple* 1.5. Le corps $\mathbb{C}$ est une extension de $\mathbb{R}$ finie de degré 2 et $\mathbb{R}$ est une extension infinie de $\mathbb{Q}$ pour des raisons de cardinalité.

## 1.4 Morphismes d'extensions

**Définition 1.6** (Morphismes)**.**
Si $L/K$ et $L'/K$ sont deux extensions de $K$, on appelle *$K$-morphisme* $\sigma : L \to L'$ un morphisme de corps qui est, de plus, $K$-linéaire (ce qui revient à dire qu'il est l'identité sur $K$ si $K \subset L, L'$).
Si $\sigma$ est un isomorphisme, son inverse est également $K$-linéaire et on parle alors d'*isomorphisme de $K$-extensions*.
En particulier, les automorphismes de $L/K$ sont les automorphismes $K$-linéaires de $L$, on note leur ensemble $\mathrm{Aut}_K(L)$.

*Exemple* 1.7. On a $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}, \iota\}$ où $\iota$ est la conjugaison complexe. En effet, un élément $f \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ vérifie $f(i)^2 = f(i^2) = f(-1) = -1$ car $-1 \in \mathbb{R}$ doit être fixé. Donc $f(i) = \pm i$ car c'est une racine du polynôme $X^2 + 1$ dans $\mathbb{C}$. Comme $(1, i)$ est une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}$ et que $f$ est $\mathbb{R}$-linéaire, ceci détermine entièrement $f$.
En revanche, c'est un problème difficile – et ouvert – de décrire $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$.

**Exercice 2.**

1. Montrer que $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\}$.
2. (Plus difficile) Montrer que $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}\Big(\mathbb{R}(X)\Big) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$.
   *Indication : On pourra caractériser $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}(X)$ comme l'ensemble des éléments qui admettent une racine $n$-ème pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

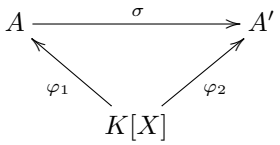
# 2 Corps de rupture

Voici une construction naturelle d'extension de corps. Avant de la poser, on donne le lemme suivant, car il sera utilisé à répétition (et sans mention explicite) dans la suite.

**Lemme 2.1.** *Soient $A$ et $A'$ deux $K$-algèbres unitaires commutatives. Alors, pour tout morphisme de $K$-algèbres $\sigma : A \to A'$, tout polynôme $Q \in K[X]$ et tout $a \in A$, on a $Q(\sigma(a)) = \sigma(Q(a))$.*

*En particulier, si $A = K[a]$ pour un certain $a$, un tel morphisme $\sigma$ est entièrement déterminé par $\sigma(a)$.*

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de la propriété universelle des anneaux de polynômes : Soit $a \in A$. Il existe deux morphismes de $K$-algèbres $\varphi_1 : K[X] \to A$ et $\varphi_2 : K[X] \to A'$ uniquement déterminés par $\varphi_1(X) = a$ et $\varphi_2(X) = \sigma(a) = \sigma \circ \varphi_(X)$. Ainsi le diagramme suivant commute :




□

**Définition 2.2.** Soit $P \in K[X]$ irréductible. Le *corps de rupture* de $P$ sur $K$ est le corps $K[X]/(P)$.

**Fait 2.3.** *(1) C'est une extension de corps de $K$ de degré* $\deg P$.

*(2) Pour toute extension $L/K$, les $K$-morphismes $\sigma : K[X]/(P) \to L$ sont en bijection avec les racines de $P$ dans $L$ via l'application $\sigma \mapsto \sigma(\overline{X})$. Le corps de rupture de $P$ sur $K$ est ainsi « la plus petite extension contenant une racine de $P$ ».*

*Démonstration.* (1) Tout d'abord, $K[X]/(P)$ est bien un corps car $P$ étant irréductible, l'idéal $(P)$ est maximal dans l'anneau principal $K[X]$. La structure d'extension de $K$ peut se voir alternativement comme la structure $K$-linéaire naturelle, ou bien l'image de $K$ via la projection canonique $K[X] \to K[X]/(P)$.

(2) Soit maintenant une extension $L/K$. Si $\sigma$ est un $K$-morphisme de $K[X]/(P)$ dans $L$ alors, par construction, pour tout polynôme $Q$ de $K[X]$ et tout $x \in K[X]/(P)$ on a $\sigma(Q(x)) = Q(\sigma(x))$. En particulier, pour $x = \overline{X}$ et $Q = P$, on a $P(\sigma(\overline{X})) = \sigma(P(\overline{X})) = \sigma(\overline{P}) = 0$. Donc $\sigma(\overline{X})$ est bien une racine de $P$ dans $L$.

Réciproquement, si $x$ est une racine de $P$ dans $L$, le morphisme d'évaluation $K[X] \to L$ qui à $Q$ associe $Q(x)$ est un morphisme d'anneaux, et son noyau contient $(P)$ par hypothèse, d'où la factorisation $K[X]/(P) \to L$. □

# 3 Générateurs

Lorsqu'on s'intéresse à une extension de corps, on essaie, comme souvent, de la décrire la plus simplement possible, donc par générateurs.

**Définition 3.1** (Générateurs)**.**

Soit $L$ une extension de $K$ et $S$ une partie de $L$. On note $K(S)$ la plus petite sous-extension de $L$ contenant $S$ (par exemple l'intersection de toutes ces sous-extensions). C'est également l'ensemble des fractions rationnelles en les éléments de $S$.

En particulier, pour tout $x \in L$, on note $K(x)$ l'extension engendrée par $x$. On dit que $L/K$ est engendrée par $x$ si $L = K(x)$.

*Remarque* 3.2. Attention, le fait d'être engendré par une certaine famille dépend du corps de base ! Penser à $L = L(1)$ par exemple, ou un peu plus subtilement à $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ comparée à $\mathbb{C}/\mathbb{R}$.

**Exercice 3.** Trouver des générateurs de $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ et $K(X)/K$ autres que $i$ et $X$.

## 3.1 Éléments algébriques et transcendants

Maintenant qu'on a affaire à des générateurs, il s'agit de comprendre la structure d'un $K(x)$.

**Définition 3.3** (Éléments algébriques ou transcendants)**.** Soit $L/K$ une extension de corps et $x \in L$. On considère le morphisme d'évaluation donné par la propriété universelle des algèbres de polynômes $\Psi : P \in K[X] \mapsto P(x) \in L$.

— Un élément de $L$ est dit *transcendant sur* $K$ si le morphisme $\Psi$ est injectif et il est dit *algébrique* dans le cas contraire.

— Si $x$ est algébrique, on appelle *polynôme minimal de* $x$ *sur* $K$, noté $\mu_{x,K}$, le polynôme unitaire qui engendre l'idéal $\ker \Psi$ de l'anneau principal $K[X]$.

— Si $x$ est algébrique, on appelle *degré* de $x$ le degré du polynôme $\mu_{x,K}$ et sinon, on dit que le degré de $x$ est infini sur $K$.

**Proposition 3.4.** *Soit $L/K$ une extension de corps et $x \in L$.*

— *Si $x \in L$ est algébrique, alors $\mu_{x,K}$ est irréductible. De plus, le corps $K(x)$ est égal à $K[x] = \operatorname{im}\Psi$, l'ensemble des polynômes en $x$, lui-même $K$-isomorphe à $K[X]/(P)$. Enfin, le degré de $x$ est exactement $[K(x) : K]$.*

— *Si $x \in L$ est transcendant sur $K$, alors $K(x)$ est $K$-isomorphe à $K(X)$, en particulier de dimension infinie.*

— *Un élément $x \in L$ est donc algébrique si et seulement si $K(x)/K$ est finie.*

*Démonstration.* Le polynôme minimal est irréductible ici car si $(QR)(x) = 0$, par intégrité $Q(x) = 0$ ou $R(x) = 0$.

Ensuite, si $x$ est algébrique, le morphisme naturel du corps de rupture de $P$ vers $L$ qui à $\overline{X}$ associe $x$ a pour image exactement $K[x]$, d'où l'isomorphisme. L'égalité dimension/degré en découle.

Si $x$ est transcendant, le morphisme d'anneaux intègres $\Psi : K[X] \to L$ est injectif donc il s'étend en un morphisme de corps $\widetilde{\Psi} : K(X) \to L$ d'image $K(x)$ dans $L$. D'où l'isomorphisme. □

## 3.2 Extensions algébriques et transcendantes

**Définition 3.5.** Une extension $L/K$ est dite *algébrique* si tous ses éléments sont algébriques, et *transcendante* sinon. Elle est *purement transcendante* si tous les éléments de $L\backslash K$ sont transcendants.

*Exemple* 3.6.
1. Les corps de rupture sont des extensions algébriques.
2. $K(X, Y) = K(X)(Y)$ est purement transcendante sur $K$.
3. $\mathbb{C}(X)$ est purement transcendante sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

**Proposition 3.7.** *(1) Toute extension finie $L/K$ est algébrique.*

*(2) Réciproquement, une extension $L/K$ est algébrique si, et seulement si, elle est réunion de ses sous-extensions finies.*

*(3) De plus, si $x, y \in L$ sont algébriques sur $K$, alors $x + y$ et $xy$ le sont également.*

*(4) Ainsi, l'ensemble des éléments algébriques de $L$ sur $K$ est une sous-extension de $L$.*

*Démonstration.* (1) Soit $L/K$ une extension finie de degré $n$ et $x \in L$. Par hypothèse, la famille $(1, x, \cdots, x^n)$, de cardinal $n+1$, est nécessairement $K$-liée, d'où l'existence d'un polynôme annulateur de $x$ (de degré au plus $n$), celui-ci est donc algébrique.

(2) Réciproquement, si $L/K$ est algébrique, alors chaque $x \in L$ est contenu dans l'extension finie $K[x]/K$. Si $L/K$ est réunion de ses sous-extensions finies, alors par (1) tous les éléments de $L$ sont algébriques sur $K$

(3) Prenons maintenant $x, y \in L$ algébriques sur $K$. Alors, $y$ est algébrique sur le corps $K[x]$, car il l'est déjà sur $K$. On a donc $K[x][y]/K$ finie, mais cette extension contient entre autres $x + y$ et $xy$, donc ceux-ci sont algébriques par le raisonnement précédent.

(4) Enfin, $x^{-1}$ est algébrique car $K(x^{-1}) = K(x)$ qui est une extension finie de $K$. □

**Exercice 4.**

1. Soit $L$ une extension de $K$ et $x, y$ algébriques sur $K$ de degrés respectifs $m$ et $n$ premiers entre eux. Montrer que $[K(x, y) : K] = mn$.
2. Soient $M/L$ et $L/K$ deux extensions de corps. Montrer que si $L/K$ est algébrique, tout $x \in M$ algébrique sur $L$ est également algébrique sur $K$.

## 3.3 Nombres transcendants

On va maintenant donner des exemples « explicites » de nombres transcendants. Culturellement, on sait qu'il est en général très difficile de savoir si un nombre est transcendant ou non, et même, l'irrationalité de certaines valeurs pose souvent problème. Par exemple, on sait que $e$ et $\pi$ sont transcendants, mais que c'est assez difficile à démontrer, que $\zeta(2n)$ est transcendant pour $n \in \mathbb{N}^*$ (c'est difficile : ça fait intervenir les nombres de Bernouilli et les puissantes paires de $\pi$ et qu'on ne sait rien dire sur l'algébricité, ou non, de $\zeta(2n+1)$.

D'un point de vue théorie des ensemble, les nombres complexes algébriques sur $\mathbb{Q}$ sont en quantité dénombrable car l'ensemble des polynômes irréductible de $\mathbb{Q}[X]$ est lui-même dénombrable. Donc, en un certain sens, presque tout nombre complexe est transcendant et pourtant la plupart des nombres qu'on est amené à écrire sont algébriques !

**Théorème 3.8** (Liouville)**.** *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ algébrique irrationnel de degré $d$ sur $\mathbb{Q}$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout rationnel $\frac{a}{b}$, on a l'inégalité $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{C}{b^d}$.*

*Démonstration.* Soit $\mu_{\alpha,\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}[X]$ le polynôme minimal de $\alpha$ sur $\mathbb{Q}$ de degré $d$. On fixe $m \geq 1$ tel que $P = m\mu_{\alpha,\mathbb{Q}} \in \mathbb{Z}[X]$. Pour toute fraction $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, par l'égalité des accroissements finis, il existe $y \in \left[\alpha, \frac{a}{b}\right]$ (ou l'intervalle inverse) tel que

$$\left|P(\frac{a}{b})\right| = \left|P(\alpha) - P(\frac{a}{b})\right| = \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| |P'(y)| .$$

Mais comme $P$ est à coefficients entiers et n'annule pas $\frac{a}{b}$ (sinon, comme il est irréductible, il serait de degré 1, or $\alpha$ est irrationnel), on a $\left|P(\frac{a}{b})\right| \geq \frac{1}{b^d}$ et $|P'(y)| \neq 0$. On a donc $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{1}{b^d |P'(y)|}$. Il suffit alors de poser $C = \min(1, \inf\limits_{y \in [\alpha, \frac{a}{b}]} \frac{1}{|P'(y)|})$ pour conclure. □

**Exercice 5.** On appelle *nombre de Liouville* tout nombre réel $\alpha$ tel que pour tout $d \geq 2$ et tout $C > 0$, il existe un rationnel $\frac{a}{b}$ tel que $0 < \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < Cb^{-d}$.

1. Montrer que tout nombre de Liouville est transcendant.
2. Donner un exemple direct de nombre de Liouville.
3. Montrer que l'ensemble des nombres de Liouville est de mesure de Lebesgue nulle, mais que l'ensemble des réels transcendants est de mesure pleine.

## 3.4 Le cas des corps de rupture

On peut maintenant formuler et démontrer une forme d'unicité du corps de rupture d'un polynôme :

**Définition 3.9.** Une extension $L/K$ est un *corps de rupture* de $P \in K[X]$ irréductible si elle est de la forme $L = K[x]$ avec $x$ une racine de $P$ dans $L$. Tous les corps de rupture de $P$ sont $K$-isomorphes.

*Démonstration.* Soit $L$ un corps de rupture de $P$ et $x$ une racine de $P$ dans $L$ telle que $L = K[x]$. Alors, par la construction originale du corps de rupture, on a un $K$-morphisme $K[X]/(P) \to L$ envoyant $\overline{X}$ sur $x$, mais il est surjectif par hypothèse, donc c'est un isomorphisme, ce qui prouve par transitivité le résultat. □

*Remarque* 3.10. On peut parler **du** corps de rupture de $P$ **sur** $K$ mais si $L/K$ est une extension telle que $P$ admet une racine dans $L$, alors on ne peut pas parler **du** corps de rupture de $P$ **dans** $L$ car chaque racine de $P$ dans $L$ donne lieu à une sous-extension $M_i = K(x_i)$ et les $M_i$ sont, a priori, distinctes.

Penser par exemple au cas de $P = X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ et à l'extension $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$.

*Exemple* 3.11. Le corps $\mathbb{C}$ est isomorphe au corps de rupture de $X^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Les corps $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ et $\mathbb{Q}(j\sqrt[3]{2})$, où $j$ est une racine primitive 3-ème de l'unité, sont isomorphes car isomorphes au corps de rupture de $X^3 + 2$ sur $\mathbb{Q}$.

**Exercice 6.** Montrer que $-1$ n'est pas un carré dans $\mathbb{Q}(j\sqrt[3]{2})$.
*Indication : on pourra contempler la non quadrature de $-1$ dans $\mathbb{R}$.*

# 4 Scindage des polynômes

La construction par corps de rupture revient à s'autoriser l'adjonction d'une racine d'un polynôme irréductible. Cependant, ce procédé ne suffit pas à ajouter toutes les racines d'un polynôme. Typiquement $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ne contient pas toutes les racines de $X^3 - 2$ bien que c'en soit un corps de rupture sur $\mathbb{Q}$.

## 4.1 Corps de décomposition

Plutôt que de manipuler impunément la clôture algébrique (qui relève en général de l'axiome du choix), on peut se concentrer sur une autre manière d'avoir les racines d'un polynôme : le corps de décomposition.

**Définition 4.1** (Corps de décomposition)**.** Soit $P \in K[X]$. Un *corps de décomposition de $P$ sur $K$* est une extension (finie) $L$ de $K$ telle que $P$ est scindé de racines $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ sur $K$ et que

$$L = K(\alpha_1, \cdots, \alpha_r).$$

**Exercice 7.** Donner des corps de décomposition de $X^4 - 1$ et $X^3 - 2$ sur $\mathbb{Q}$.

**Proposition 4.2.** *Soit $P \in K[X]$. Il existe toujours un corps de décomposition de $P$ sur $K$, et si $L$ et $L'$ sont deux tels corps, il existe un $K$-isomorphisme entre $L$ et $L'$. On s'autorise donc souvent à dire « le » corps de décomposition de $P$.*

*Démonstration.* La preuve de l'existence, est relativement directe. Si $P$ n'est pas scindé sur $K$ (auquel cas $K$ convient), soit $Q$ un facteur irréductible de $P$ sur $K[X]$. Alors, dans $K_1$ le corps de rupture de $Q$ sur $K$, le polynôme $P$ admet une racine, notée $\alpha$, et $K_1 = K[\alpha]$. On a donc

$$P = (X - \alpha)P_1, \quad P_1 \in K_1[X].$$

On recommence avec un facteur irréductible de $P_1$ si celui-ci n'est pas scindé sur $K_1$, ce qui donne une tour d'extensions

$$K \subset K_1 \subset \cdots \subset K_d$$

où $d$ est majoré par le degré de $P$ (vu que le degré du polynôme considéré décroît de 1 à chaque étape). Par construction, $K_d$ est une extension dans laquelle $P$ devient scindé, et on n'a utilisé que des racines de $P$ pour l'engendrer, donc c'est bien un corps de décomposition.

La preuve de l'unicité est un peu plus subtile et requiert une définition supplémentaire.

**Définition 4.3.** Supposons qu'on a un isomorphisme de corps $i : K \to K'$ et des extensions respectives $L$ et $L'$ de $K$ et $K'$. Alors un $i$-isomorphisme $\sigma : L \to L'$ est un isomorphisme de corps entre $L$ et $L'$ tel que pour tous $\lambda \in K, x \in L$,

$$\sigma(\lambda x) = i(\lambda)\sigma(x).$$

Pour tout polynôme $P \in K[X]$, on note $i(P) \in K'[X]$ le polynôme obtenu en appliquant $i$ à chacun de ses coefficients. On va alors montrer le lemme suivant :

**Lemme 4.4.** *Pour tous corps $K, K'$, tout $i : K \to K'$ isomorphisme, et tout polynôme $P \in K[X]$, si $L$ et $L'$ sont des corps de décomposition respectivement de $P$ sur $K$ et $i(P)$ sur $K'$, alors il existe un $i$-isomorphisme $\sigma : L \to L'$.*

Ce lemme, appliqué à $K' = K$ et $i$ l'identité, implique bien l'unicité des corps de décomposition, et on va le démontrer par récurrence sur le degré de $P$.

Si $P$ est constant ou de degré 1, il n'y a rien à faire car forcément ses racines appartiennent au corps de base donc $L = K$ et $L' = K'$.

Supposons maintenant que le lemme est vrai pour tout polynôme (et tous corps notés comme ci-dessus) de degré $n$. Soit $P \in K[X]$ de degré $n + 1$, soit $L$ un corps de décomposition de $P$ sur $K$ et $L'$ un corps de décomposition de $P$ sur $K'$, avec $i : K \to K'$ un isomorphisme de corps.

Alors, en prenant une racine $\alpha_1$ de $P$ dans $L$, considérons son polynôme minimal $P_1$ sur $K$. Il est irréductible sur $K$ donc $i(P_1)$ est irréductible sur $K'$, mais par ailleurs il divise $i(P)$ qui est scindé sur $L'$ par hypothèse. Il existe donc $\alpha'_1$ une racine de $i(P_1)$ dans $L$.

On peut alors construire un $i$-isomorphisme $j$ entre $K[\alpha_1]$ et $K'[\alpha'_1]$, en envoyant $\alpha_1$ sur $\alpha'_1$ (en passant par les corps de rupture respectifs de $P_1$ et $i(P_1)$). Mais par hypothèse, $L$ est alors un corps de décomposition de $P/(X - \alpha_1)$ sur $K[\alpha_1]$, et de même pour $L'$ et $i(P)/(X - \alpha'_1) = j(P/(X - \alpha_1))$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à ce polynôme, aux extensions et à $j$, ce qui conclut la preuve. □

**Exercice 8.** Montrer que le corps de décomposition d'un polynôme de degré au plus $n$ sur $K$ est de degré au plus $n!$ sur $K$.

**Exercice 9.** Décrire les corps de décomposition de $X^3+X+1$, $X^4-2$, $X^5-3$ et $X^n-1$ sur $\mathbb{Q}$.

L'unicité du corps de décomposition a une application très importante : les corps finis. Rendez-vous très bientôt en cours d'option C !

## 4.2 Frobeniuseries

Si $A$ est un anneau commutatif unitaire, on peut définir un morphisme d'anneau structurel

$$\begin{array}{rccc} \varphi_A : & \mathbb{Z} & \to & A \\ & n & \mapsto n \cdot \mathbf{1}_A & \end{array}$$

Le noyau $\ker \varphi_A$ est donc un idéal de $\mathbb{Z}$ de la forme $a\mathbb{Z}$ pour un $p_A \in \mathbb{N}$.

**Définition 4.5.** L'entier naturel $p_A$ s'appelle la *caractéristique* de l'anneau $A$ et est noté $\mathrm{car}(A)$.

*Exemple* 4.6. On a $\mathrm{car}(\mathbb{Z}) = 0$ et $\mathrm{car}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = n$. Plus subtilement, $\mathrm{car}(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}) = \mathrm{ppcm}(a,b)$.

Comme vous le savez sûrement déjà :

**Fait 4.7.** *Si $A$ est un corps, alors $\mathrm{car}(A) = 0$ ou est un nombre premier.*

*Démonstration.* L'anneau quotient $\mathbb{Z}/\mathrm{car}(A)\mathbb{Z}$ s'identifie à un sous-anneau de $A$ donc est intègre. Ainsi, le nombre $\mathrm{car}(A) = 0 \in \mathbb{Z}$ n'est pas composé. □

Commençons par une remarque préliminaire :

**Fait 4.8.** *Soit $L/K$ une extension de corps. Alors $\mathrm{car}(L) = \mathrm{car}(K)$.*

*Démonstration.* Le morphisme canonique $\mathbb{Z} \to K$ s'étend par composition par l"injection $K \to L$ en le morphisme canonique $\mathbb{Z} \to L$. Ces morphismes ont donc même noyau définissant la caractéristique de ces deux corps. □

Soit $K$ un corps et $P \in K[X] \setminus \{0\}$ un polynôme unitaire. Soit $p = \mathrm{car}(K)$.

**Fait 4.9.** *Si $p = 0$, alors $P' = 0 \iff P = 1$.*
*Si $p > 0$, alors $P' = 0 \iff \exists Q \in K[X] \setminus \{0\}$ unitaire tel que $P = Q \circ X^p$.*

*Démonstration.* Si $p = 0$, alors le coefficient de $P'$ est $n$ qui n'est pas égal à 0 dans $K$.

Si $p > 0$, écrivons $P = \sum_k a_k X^k$ et $P' = \sum_k k a_k X^k$. Alors pour tout $k \wedge p = 1$, on a $k a_k = 0$ donc $a_k = 0$. Ainsi $P = \sum_{k=pl} a_{pl} X^l \circ X^p$ et on prend $Q = \sum_{k=pl} a_{pl} X^l$. Réciproquement $(Q \circ X^p)' = Q' \circ X^p \cdot (pX^{p-1}) = 0$. □

**Lemme 4.10.** *Si $p$ est un nombre premier, alors $p \mid \binom{p}{k}$ pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$.*

*Démonstration.* On observe que pour tout $1 \leq k \leq p-1$, on a $v_p(k) = 0$ et, en particulier, $v_p(k!) = 0$. Ainsi $v_p\left(\binom{p}{k}\right) = v_p\left(p\frac{(p-1)!}{k!(p-k)!}\right) = 1$. □

*Remarque* 4.11. Ceci est en général faux lorsque $p$ n'est pas premier. Par exemple, 4 ne divise pas $6 = \binom{4}{2}$ et la preuve ne marche pas parce qu'on ne peut pas définir une valuation $n$-adique que si $n$ est un irréductible de l'anneau factoriel $\mathbb{Z}$ (donc un nombre premier).

Si $p > 0$, on définit l'application suivante appelée *morphisme de Frobenius* par :

$$\begin{array}{rccc} F_K : & K & \to & K \\ & x & \mapsto & x^p \end{array}$$

Si le corps $K$ est clair dans le contexte, on le notera plus simplement $F$.

**Fait 4.12.** *On suppose $p = \mathrm{car}(K) > 0$.*
*(1) Le morphisme de Frobenius $F$ est un morphisme de corps, donc injectif.*
*(2) De plus, pour tout $P = \sum_{k=0}^d a_k X^p$, on a $(P(X))^p = \sum_{k=0}^d a_k^p X^{kp}$. En particulier, pour tout $P \in \mathbb{F}_p[X]$, on a $(P(X))^p = P(X^p)$.*
*(3) Si $m \in \mathbb{N}^*$, alors l'ensemble des points fixés par $F^m = F \circ \cdots \circ F$ est un sous-corps fini de $K$.*

*Démonstration.* (1) Il suffit de montrer que c'est stable par addition et multiplication. Or $F(x+y) = (x+y)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k y^{p-k} = x^p + y^p = F(x) + F(y)$ et $F(xy) = (xy)^p = x^p y^p = F(x)F(y)$. Enfin $F(1) = 1^p = 1$.

(2) Il suffit de prendre l'endomorphisme de Frobenius du corps $K(X)$ qui est aussi de caractéristique $p$ et, sur $\mathbb{F}_p$, on a $a^p = a$ pour tout $a \in \mathbb{F}_p$.

(3) L'ensemble $A$ des points fixes de $F^m$ est l'ensemble des racines du polynôme $X^{p^m} - X$ dans $K$, donc est fini. On observe immédiatement que $A$ est un sous-anneau de $K$, donc intègre. De plus, si $a \in A \setminus \{0\}$, alors $a^{p^m} = a$ donne $a^{p^m-2}a = 1$ donc $a$ est inversible. □

*Remarque* 4.13. En général le noyau de $F^m - \mathrm{Id}$ n'est cependant pas un corps à $p^m$ éléments mais un corps plus petit.

**Définition 4.14.** (1) Un corps $K$ est dit *parfait* s'il est de caractéristique 0 ou si l'endomorphisme de Frobenius est un automorphisme de $K$.

(2) Un polynôme est dit *séparable* s'il est à racines simples dans son corps de décomposition.

On dispose alors des résultats suivants que l'on démontrera en exercice :

**Proposition 4.15.** *Soit $K$ un corps de caractéristique $p$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire.*

1. *Le polynôme $P$ est séparable si et seulement si $P$ et $P'$ sont premiers entre eux.*
2. *Les corps finis et les corps algébriquement clos sont parfaits.*
3. *Si le corps $K$ est parfait et si le polynôme $P$ est irréductible, alors $P$ est séparable.*

**Exercice 10.** Soit $L = \mathbb{F}_p(T)$ et $K$ l'image du morphisme de Frobenius $F_L$. Montrer que le polynôme $X^p - T^p \in K[X]$ est irréductible sur $K$ mais pas sur $L$ et qu'il n'est pas séparable.

## 4.3 Clôture algébrique

**Définition 4.16.** (1) Un corps $L$ est dit *algébriquement clos* si tous les polynômes irréductibles de $L[X]$ sont de degré 1 (ce qui revient à dire qu'il n'admet aucune extension algébrique/finie non triviale).

(2) Une *clôture algébrique* du corps $K$ est une extension $L/K$ qui est à la fois algébrique et algébriquement close.

(3) Si $L/K$ est une extension de corps, on appelle *fermeture algébrique* de $K$ dans $L$ l'ensemble des éléments de $L$ qui sont algébriques sur $K$.

*Exemple* 4.17. Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos mais n'est pas une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$.

**Proposition 4.18.** *Si $L/K$ est une extension de corps avec $L$ algébriquement clos, alors la fermeture algébrique de $K$ dans $L$ est une clôture algébrique de $K$.*

*Démonstration.* Notons $\widehat{K} = \{x \in L,\ \exists P \in K[X],\ P(x) = 0\}$ la fermeture algébrique de $K$ dans $L$. On a vu (Proposition 3.7(4)) que c'est une sous-extension de $L/K$ dont tous les éléments sont, par définition, algébriques sur $K$. Donc $\widehat{K}$ est une extension algébrique de $K$. Montrons que c'est aussi un corps algébriquement clos.

Soit $P = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i \in \widehat{K}[X]$ un polynôme unitaire de degré $d \geqslant 1$. Soit $x \in L$ une racine de $P$ dans $L$ et $\widetilde{K} = K(a_0, \ldots, a_{d-1})$. Alors l'extension $\widetilde{K}/K = K(a_0, \ldots, a_{d-1})/K$ est une extension finie de $K$ car engendrée par des éléments algébriques sur $K$. Mais l'extension $\widetilde{K}(x)/\widetilde{K}$ est finie car c'est un corps de rupture. Par le théorème de la base télescopique, l'extension $K(a_0, \ldots, a_{d-1}, x)/K$ est finie. Donc, par la proposition 3.7(1), c'est une extension algébrique de $K$. Ainsi, $x$ est un élément algébrique sur $K$ donc $x \in \widehat{K}$, ce qui montre que $\widehat{K}$ est algébriquement clos. □

*Exemple* 4.19. $\mathbb{C}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{R}$.

L'ensemble des nombres complexes algébriques sur $\mathbb{Q}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$.

**Théorème 4.20** (Propriété verselle des corps algébriquement clos)**.** *Soit $K$ un corps. Il existe une extension algébrique de $K$ qui est un corps algébriquement clos, souvent notée $\overline{K}$ et appelée* **une** *clôture algébrique de $K$.*

*Les clôtures algébriques de $K$ sont toujours $K$-isomorphes deux à deux.*

*Remarque* 4.21. On notera qu'une clôture algébrique d'un corps est uniquement déterminée à isomorphisme près mais que cet isomorphisme n'a rien d'unique : cela dépend en fait du groupe d'automorphismes de corps $\mathrm{Aut}_K(\overline{K})$ qui n'est pas trivial en général comme on l'a déjà remarqué.

*Construction de la clôture algébrique.* La démonstration de l'existence et de l'unicité est proposée en exercice (cf. TD), comme suit :

On fixe un corps $K$ quelconque.

1. Soit $S$ l'ensemble des polynômes irréductibles de $K[X]$. On pose $A = K[(X_P)_{P\in S}]$ et $I$ l'idéal de $A$ engendré par les $P(X_P), P \in S$. Montrer que $I \neq A$.
2. En prenant $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de $A$ contenant $I$, montrer que dans l'extension $K_1 = A/\mathfrak{m}$ de $K$, tout polynôme irréductible de $K[X]$ a une racine.
3. Itérer le procédé pour construire une suite d'extensions de corps
$$K \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots$$
et montrer que $K_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est un corps algébriquement clos.
4. En posant $\overline{K}$ l'ensemble des éléments de $K_\infty$ algébriques sur $K$, montrer que $\overline{K}$ est bien une clôture algébrique de $K$.
5. Pour toute extension algébrique $L$ de $K$, montrer qu'il existe un plongement de $L$ dans $\overline{K}$ prolongeant l'inclusion $K \subset \overline{K}$. En déduire que la clôture algébrique de $K$ est unique à isomorphisme près.
6. Montrer que pour toute extension finie $L/K$, il existe au plus $[L : K]$ plongements $K$-linéaires distincts de $L$ dans $\overline{K}$.
7. On note $[L : K]_s$ le nombre de ces plongements. Montrer que pour une extension finie $M$ de $L$, on a $[M : K]_s = [M : L]_s[L : K]_s$ (utile pour l'exercice sur les extensions séparables).

□

# 5 Extensions séparables, normales et galoisiennes

MISE EN GARDE : Ceci va bien au-delà du programme de l'agrégation et, faute de temps, on n'en parlera pas. Je vous déconseille de parler de ce qui suit dans vos plans, à moins que vous ne le maitrisiez déjà très bien.

## 5.1 Extensions séparables

On a introduit précédemment la notion de polynôme séparable : c'est un polynôme pour lequel il existe une extension qui « sépare » les racines, autrement dit qui est scindé dans son corps de décomposition.

**Définition 5.1.** Soit $L/K$ une extension de corps. Si $\overline{K}$ est une clôture algébrique de $K$, on note $[L : K]_s$ le nombre de plongements de $L$ dans $\overline{K}$.

Un élément $x \in L$ est dit *séparable* sur $K$ si son polynôme minimal $\mu_{x,K}$ est séparable.

L'extension $L/K$ est dite *séparable* si tous les éléments de $L$ sont séparables sur $K$.

*Remarque* 5.2. On prendra soin de remarquer que la notation $[L : K]_s$ est un nombre qui ne dépend pas du choix, non canonique, d'une clôture algébrique $\overline{K}$ de $K$.

**Proposition 5.3.** *Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de $K$ et $L/K$ une extension finie. S'équivalent :*

*(i)* *$L/K$ est séparable ;*

*(ii)* *$[L : K]_s = [L : K]$ ;*

*(iii)* *il existe des éléments $x_1, \ldots, x_n \in L$ séparables sur $K$ tels que $L = K[x_1, \ldots, x_n]$.*

*Démonstration.* Traiter le TD6 exercice 14 questions 1 et 2. □

**Proposition 5.4.** *Un corps $K$ est parfait si, et seulement si, toute extension finie de $K$ est séparable.*

*Démonstration.* Traiter le TD6 exercice 14 question 3. □

**Théorème 5.5** (Théorème de l'élément primitif)**.** *Soit $L/K$ une extension finie séparable. Alors il existe un élément $x \in L$ tel que $L = K[x]$.*

*Démonstration.* Traiter le TD6 exercice 18. □

## 5.2 Extensions normales

**Définition 5.6.** Une extension $L$ de $K$ est dite *normale* si tout polynôme irréductible de $K[X]$ ayant une racine dans $L$ est scindé sur $L$.

**Théorème 5.7.** *Soit $L/K$ une extension finie. S'équivalent :*

*(i) $L/K$ est normale ;*

*(ii) il existe $P \in K[X]$ tel que $L = \mathrm{Dec}_K(P)$ ;*

*(iii) il y a autant d'automorphismes de $L$ sur $K$ que de $K$-plongements de $L$ dans $\overline{K}$.*

*Démonstration.* Traiter le TD6 exercice 15. □

## 5.3 Extensions galoisiennes et groupes de Galois

**Définition 5.8.** Une extension de corps $L/K$ est dite *galoisienne* si elle est séparable et normale.

On appelle groupe de Galois d'une extension galoisienne $L/K$ le groupe noté $\mathrm{Gal}(L/K) = \mathrm{Aut}_K(L)$ des automorphismes de corps de $L$ fixant $K$.

*Exemple* 5.9. Tout corps de décomposition d'un polynôme sur $\mathbb{Q}$ est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$.

Toute clôture séparable $K_s/K$ est une extension galoisienne de $K$. En particulier, si $K$ est parfait, c'est le cas de $\overline{K} = K_s$.

Soit $\Phi_n$ le $n$-ème polynôme cyclotomique. On sait que $\Phi_n$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Ici on a $D = \mathrm{Dec}_{\mathbb{Q}}(\Phi_n) \simeq \mathbb{Q}[X]/(\Phi_n) \simeq \mathbb{Q}[\zeta_n]$ où $\zeta_n = e^{\frac{i2\pi}{n}} \in \mathbb{C}$. De plus $\mathrm{Gal}(D/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. Attention : ceci est faux en général si on remplace $\mathbb{Q}$ par un corps quelconque. Par exemple, $\Phi_n$ est déjà scindé sur $\mathbb{C}$.

Les résultats sur les extensions galoisiennes sont résumés dans le TD6 exercice 19. Citons les plus importants.

**Théorème 5.10.** *Soit $L/K$ une extension finie. Alors* $\mathrm{Card}\,(\mathrm{Aut}_K(L)) \leqslant [L : K]$. *De plus, s'équivalent :*

*(i) l'extension $L/K$ est galoisienne ;*

*(ii)* $\mathrm{Card}\,(\mathrm{Aut}_K(L)) = [L : K]$ *;*

*(iii) il existe un polynôme séparable $P \in K[X]$ tel que $L = \mathrm{Dec}_K(P)$.*

*Démonstration.* Traiter TD6 exercice 19 questions 1 et 2. □

**Proposition 5.11.** *Si $P$ est un polynôme irréductible et séparable, alors* $\mathrm{Gal}(\mathrm{Dec}_K(P)/K)$ *contient un élément d'ordre $p$ pour tout $p$ premier divisant $n$.*

*Démonstration.* On a $n|[\mathrm{Dec}_K(P) : K]|n!$. Le résultat découle alors du théorème précédent et des théorèmes de Lagrange et de Cauchy appliqués au groupe $\mathrm{Gal}(\mathrm{Dec}_K(P)/K)$. □

**Lemme 5.12** (Lemme d'Artin)**.** *Soit $L$ un corps et $G$ un sous-groupe fini de* $\mathrm{Aut}(L)$. *On note $L^G = \{x \in L,\ \forall g \in G,\ g(x) = x\}$. Alors $L^G$ est un sous-corps de $L$ et l'extension $L/L^G$ est finie galoisienne de groupe de Galois $G$.*

*Démonstration.* Traiter TD6 exercice 19 question 5. □

## 5.4 Correspondance de Galois

Pour terminer cette section culturelle, on énonce le résultat remarquable de la théorie de Galois.

**Théorème 5.13** (Correspondance de Galois)**.** *Soit $L/K$ une extension finie galoisienne de groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Pour tout sous-groupe $H \subset G$, on note $L^H = \{x \in L,\ \forall h \in H,\ h(x) = x\}$.*

1. *C'est une sous-extension de $L$ contenant $K$ telle que $L/L^H$ est galoisienne de groupe de Galois $H$.*
2. *On a une correspondance bijective :*

$$\begin{array}{ccc} \{H \text{ sous-groupe de } G\} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \{M/K \text{ sous-extension de } L/K\} \\ H & \mapsto & L^H \\ \mathrm{Gal}(L/M) & \leftarrow\!\shortmid & M \end{array}$$

3. *L'extension $L^H/K$ est galoisienne si, et seulement si, $H$ est un sous-groupe distingué de $G$. Dans ce cas, on a un isomorphisme de groupes* $\mathrm{Gal}(L^H/K) \simeq G/H$.

*4. On a une correspondance bijective :*

$$\begin{array}{ccc} \{N \text{ sous-groupe distingué de } G\} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \{M/K \text{ sous-extension galoisienne de } L/K\} \\ H & \mapsto & L^H \\ \mathrm{Gal}(L/M) & \leftarrow\!\shortmid & M \end{array}$$

Lorsqu'on dessine des treillis d'extensions ou de sous-groupes, on prendra soin d'observer que la correspondance de Galois renverse l'ordre des flèches.

Attention : la correspondance de Galois est un résultat théorique qui ne permet pas en pratique de calculer des groupes de Galois ou de manipuler des extensions.

Pour conclure, introduisons un outil que l'on retrouvera dans le cours d'arithmétique.

**Définition 5.14.** Soit $L/K$ une extension finie. Pour $x \in L$, la multiplication par $x$ est un endomorphisme $m_x : L \to L$ qui est $K$-linéaire. On dispose alors d'un nombre $N(x) = \det(m_x) \in K$.

On appelle *norme* de $L/K$ l'application $\begin{array}{rccc} N_{L/K} : & L & \to & K \\ & x & \mapsto & \det(m_x) \end{array}$.

**Fait 5.15.** *La norme induit un morphisme de groupes abéliens $N_{L/K} : L^* \to K^*$.*

**Proposition 5.16.** *Si $L/K$ est galoisienne, alors*

$$\forall x \in L, \quad N_{L/K}(x) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} \sigma(x).$$

Un théorème majeur en théorie de Galois est le suivant :

**Théorème 5.17** (Théorème de Hilbert 90)**.** *Soit $L/K$ une extension galoisienne de groupe de Galois cyclique engendré par un élément $\sigma$. Soit $x \in L^*$. Alors*

$$N_{L/K}(x) = 1 \iff \exists y \in L^* \ x = \frac{\sigma(y)}{y}.$$