Formes bilinéaires et quadratiques

Leçons directement concernées (2020)

(170) Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

(171)* Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Leçons directement liées (2020)

(106) Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

(150)* Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

(154)* Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

(155)* Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

(158)* Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

(159) Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

(160)* Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

(161)* Distances et isométries d'un espace affine euclidien.

(191) Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.

Leçons où des formes quadratiques peuvent apparaitre (2020)

(120) Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.

(126) Exemples d'équations en arithmétique.

(151) Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

(153) Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

(156) Exponentielle de matrices. Applications.

(181)* Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Ce qui est dans le programme

(a) Formes bilinéaires. Formes bilinéaires alternées. Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques, forme polaire d'une forme quadratique (en caractéristique différente de 2). Éléments orthogonaux, interprétation géométrique. Formes non dégénérées. Adjoint d'un endomorphisme. Représentation matricielle, changement de base. Rang d'une forme bilinéaire.

(b) Orthogonalité. Sous-espaces isotropes. Décomposition d'une forme quadratique en somme de carrés. Théorème d'inertie de Sylvester. Classification dans le cas de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Procédés d'orthogonalisation.

Bibliographie

- Audin, Géométrie.
- Berger, Géométrie.
- Deheuvels, Formes quadratiques et groupes classiques.
- Fresnel, Espaces quadratiques, euclidiens, hermitiens.
- Goblot, Algèbre linéaire.
- Perrin, Cours d'algèbre.
- Seguins Pazzis, Invitation aux formes quadratiques.

Table des matières

1 Formes quadratiques sur un corps quelconque

Hypothèse fondamentale : K est un corps de caractéristique différente de 2 !
Dans toute la suite, V est un K-espace vectoriel de dimension finie n.

1.1 Définitions : formes, espaces quadratiques et morphismes

Définition 1.1. Une *forme quadratique* q sur V est une application $q : V \to K$ telle qu'il existe une forme bilinéaire symétrique $b_q : V \times V \to K$ telle que $\forall v \in V,\ q(v) = b_q(v, v)$.

Proposition 1.2 (Formules de polarisation)**.** *La forme b_q est uniquement déterminée par les formules*

$$b_q(x, y) = \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2} = \frac{q(x+y) - q(x-y)}{4}.$$

Démonstration. Par définition, il existe b bilinéaire telle que $b(v, v) = q(v)$. On a alors :

$$\begin{aligned} q(x+y) - q(x) - q(y) &= b(x+y, x+y) - b(x, x) - b(y, y) \\ &= b(x, y) + b(y, x) && \text{par bilinéarité,} \\ &= 2b(x, y) && \text{par symétrie.} \end{aligned}$$

D'où l'unicité. De même, on a :

$$\begin{aligned} q(x+y) - q(x-y) &= b(x+y, x+y) - b(x-y, x-y) \\ &= \Big(b(x, x) + b(x, y) + b(y, x) + b(y, y)\Big) \\ &\quad - \Big(q(x, x) - q(y, x) - q(x, y) + q(y, y)\Big) && \text{par bilinéarité,} \\ &= 4b(x, y) && \text{par symétrie.} \end{aligned}$$

□

Corollaire 1.3. *L'ensemble des formes quadratiques sur $V \simeq K^n$ est un K-espace vectoriel isomorphe au K-espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques, donc de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.*

Définition 1.4 (Espaces et morphismes)**.** Un *espace quadratrique* sur K est un couple (V, q) formé d'un espace vectoriel V de dimension finie sur K et d'une forme quadratique q sur V.

Un *morphisme d'espaces quadratiques* $f : (V_1, q_1) \to (V_2, q_2)$ est une application linéaire $f : V_1 \to V_2$ telle que $b_2(f(x), f(y)) = b_1(x, y)\ \forall x, y \in V_1$, autrement dit $q_2 \circ f = q_1$.

Une *isométrie* est un morphisme bijectif entre espaces quadratiques.

Fait 1.5. *L'inverse d'une isométrie est une isométrie.*

L'ensemble des isométries d'un espace quadratique (V, q) forme un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$*. On l'appelle* groupe orthogonal *et on le note $\mathcal{O}(V, q)$ ou plus simplement $\mathcal{O}(q)$.*

Démonstration. L'inverse d'une application linéaire est toujours linéaire et $q_2 \circ f = q_1 \Leftrightarrow q_1 \circ f^{-1} = q_2$.

On a $\mathcal{O}(q) = \{u \in \mathrm{GL}(V),\ q \circ u = q\} = \{u \in \mathrm{GL}(V),\ b_q(u(x), u(y)) = b_q(x, y)\}$. Ainsi, pour $u, v \in \mathcal{O}(q)$, on a $u \circ v^{-1} \in \mathrm{GL}(V)$ satisfait $q \circ \left(u \circ v^{-1}\right) = (q \circ u) \circ v^{-1} = q \circ v^{-1} = q$. □

Définition 1.6. Deux formes quadratiques q_1, q_2 sur un même espace vectoriel V sont dites *équivalentes* si les espaces quadratiques (V, q_1) et (V, q_2) sont isométriques, autrement dit s'il existe $f \in \mathrm{GL}(V)$ telle que $q_2 \circ f^{-1} = q_1$.

L'un des enjeux de la théorie – la classification des formes quadratique – consistera à décrire les classes d'équivalences de formes quadratique sur K^n, autrement dit, à trouver un invariant total de l'action sur groupe $\mathrm{GL}_n(K)$ sur l'espace vectoriel des formes quadratiques.

1.2 Orthogonalité

Soit (V, q) un espace quadratique fixé.

Définition 1.7. On dit que deux vecteurs $x, y \in V$ sont *q-orthogonaux* si $b_q(x, y) = 0$.

Si W est une partie (typiquement un sous-espace vectoriel) de V, on appelle *orthogonal* de W dans V l'ensemble $W^\perp = \{v \in V,\ b(w, v) = 0\ \forall w \in W\}$.

Fait 1.8. *L'orthogonal $W^\perp$ est un sous-espace vectoriel de V.*

Démonstration. On a $0 \in W^\perp$ et si $x, y \in W^\perp$, si $\lambda, \mu \in K$, alors $b_q(\lambda x + \mu y, w) = 0\ \forall w \in W$ par bilinéarité. Donc $\lambda x + \mu y \in W^\perp$. □

Définition 1.9. On appelle *noyau* (ou radical) de q le sous-espace vectoriel $\ker(q) = V^\perp$.

On appelle *rang* de q la quantité $\operatorname{rg}(q) = \dim(V) - \dim(\ker q)$.

On dit que q est non dégénérée si $\ker q = \{0\}$.

Fait 1.10. *La forme quadratique q est non dégénérée si, et seulement si, $\forall v \in V \setminus \{0\},\ \exists w \in V,\ b_q(v, w) \neq 0$.*

Toute forme quadratique q induit une forme quadratique non dégénérée sur $V/\ker q$.

Définition 1.11. On appelle *morphisme K-linéaire fondamental* l'application

$$r_b = \ell_b = \Phi : \begin{array}{ccc} V & \to & V^* \\ v & \mapsto & b(v, \cdot) \end{array}$$

Théorème 1.12. *(1) On a $\ker \Phi = \ker q$.*

(2) Si q est non dégénérée, alors pour tout sous-espace vectoriel W de V :

(a) l'application Φ induit un isomorphisme $\Phi : W^\perp \to (V/W)^*$.

(b) $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$

(c) $\left(W^\perp\right)^\perp = W$.

Démonstration. L'application Φ est K-linéaire.

(1) Soit $v \in V$. On a $\Phi(v) = 0 \Leftrightarrow \forall w \in V,\ b_q(v, w) = 0 \Leftrightarrow v \in V^\perp = \ker q$.

(2) On suppose désormais $\ker q = 0$. Soit W un sous-espace vectoriel de V et $\phi = \Phi_{|W^\perp}$. Alors $\forall v \in W^\perp,\ \forall w \in W,\ \phi(v)(w) = b_q(v, q) = 0$. Comme $(V/W)^*$ est isomorphe à l'espace vectoriel des formes linéaires nulles sur W, on en déduit que $\phi(v)$ passe au quotient en $\varphi(v) \in (V/W)^*$.

Si $f \in (V/W)^*$ est vue comme une forme linéaire sur V nulle sur W, comme Φ est injective entre espaces vectoriels de même dimension, elle est surjective. Ainsi, il existe $v \in V$ tel que $f = \Phi(v) = b_q(v, \cdot)$. Pour tout $w \in W$, on a $0 = f(w) = b_q(v, w)$. Donc $v \in W^\perp$. Ainsi $f = \varphi(w)$ donc $\phi : W^\perp \to (V/W)^*$ est un isomorphisme, ce qui donne (a).

En particulier, $\dim W^\perp = \dim(V/W)^* = \dim V - \dim W$ donne (b).

Enfin, $\dim \left(W^\perp\right)^\perp = \dim\left(V^*/(V/W)^*\right) = \dim V^* - \dim(V/W)^* = \dim W$. Comme $\left(W^\perp\right)^\perp \subset W$ sont des espaces vectoriels de même dimension, on a l'égalité (c). □

1.3 Isotropie

Définition 1.13. Un vecteur $v \in V$ est dit *isotrope* si $q(v) = 0$ et *anisotrope* sinon.

On appelle *cône isotrope* de q l'ensemble $C(q) = \{v \in V,\ q(v) = 0\}$.

On dit que q est *isotrope* si $C(q) \neq \{0\}$ et *anisotrope* sinon.

Fait 1.14. *L'ensemble $C(q)$ est un cône.*

Démonstration. $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$. □

Remarque 1.15. En général, $C(q)$ n'est pas convexe. Par exemple, pour $V = K^2$ et $q(x, y) = x^2 - y^2$ on a $C(q) = \{(x, y),\ x^2 - y^2 = 0\}$ est l'union des deux droites $K(1, 1)$ et $K(1, -1)$ car $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$.

Définition 1.16. Soit W un sous-K-espace vectoriel de V.

On dit que W est *singulier* (ou isotrope) si $q_{|W}$ est dégénérée.

On dit que W est *totalement isotrope* si $q_{|W} = 0$.

Exemple 1.17. Considérons $(V, q) = \big(K^3, q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2\big)$. q est isotrope car $q(1, 0, 1) = 0$. Soit $W = K(1, 0, 1) \oplus K(1, 1, 1)$ hyperplan de V. Alors W est un sous-espace singulier de V car $b_q((1, 0, 1), (x, y, z)) = 0$ pour tout $(x, y, z) \in W$, car on peut le tester sur la base $((1, 0, 1), (1, 1, 1))$ de W mais ce n'est pas un espace totalement isotrope car $q(1, 1, 1) = 1$.

Fait 1.18. *Soit W un sous-espace vectoriel de V. S'équivalent*

(i) W *n'est pas singulier ;*

(ii) $q_{|W}$ *est non dégénérée ;*

(iii) $W \cap W^{\perp} = 0$ *;*

(iv) $V = W \oplus W^{\perp}$.

Démonstration. $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftarrow (iv)$ par définition.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ car $\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W$. □

1.4 Symétries orthogonales

Définition 1.19 (Symétries)**.** Soit W un sous-espace vectoriel non singulier. On appelle *symétrie orthogonal* par rapport à W l'élément de $\mathcal{O}(q)$:

$$s_W : \begin{array}{ccc} V = W \oplus W^{\perp} & \to & V \\ w + w' & \mapsto & w - w' \end{array}$$

Si $\operatorname{codim}_V W = 1$, on dit que s_W est une *réflexion orthogonale*.

Si $\operatorname{codim}_V W = 2$, on dit que s_W est un *renversement*.

Fait 1.20 (Action par conjugaison de $\mathcal{O}(q)$)**.** *On a* $u \circ s_W \circ u^{-1} = s_{u(W)}$.

Fait 1.21. *Si $v \in V$ est anisotrope, alors l'espace vectoriel $W = (Kv)^{\perp}$ n'est pas singulier et*

$$s_{(Kv)^{\perp}}(x) = x - 2\frac{b_q(x, v)}{q(v)}v \qquad \forall x \in V.$$

Démonstration. Soit $x \in V$ qu'on écrit $x = y + \lambda v$ avec $y \in (Kv)^{\perp}$ et $\lambda \in K$. Alors $s_{(Kv)^{\perp}}(x) = y - \lambda v = x - 2\lambda v$. Or $b_q(x, v) = \lambda q(v)$. Donc $\lambda = \frac{b_q(x,v)}{q(v)}$ car $q(v) \neq 0$ par anisotropie de v. □

Proposition 1.22. *Les symétries orthogonales sont exactement les éléments $u \in \mathcal{O}(q)$ tels que* $u^2 = \mathrm{id}$.

Démonstration. Par construction, les symétries orthogonales s_W vérifient $s_W^2 = \mathrm{id}_V$.

Soit $u \in \mathcal{O}(q)$ tel que $u^2 = \mathrm{id}$. Le polynôme minimal de u est simplement scindé de valeurs propres ± 1 car $\mathrm{car}(K) \neq 2$ et $V = \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u + \mathrm{id})$. Posons $W = \ker(u - \mathrm{id})$ et $W' = \ker(u + \mathrm{id})$ et montrons que $W' = W^{\perp}$.

Si $x \in W$ et $y \in W'$, alors

$$\begin{aligned} b_q(u(x) - x, y) = 0 & \\ &= b_q(u(x), y) - b_q(x, y) && \text{par linéarité} \\ &= -b_q(u(x), u(y)) - b_q(x, y) && \text{car } y = -u(y) \\ &= -2b_q(x, y) && \text{car } u \in \mathcal{O}(q) \end{aligned}$$

Donc $W' = W^{\perp}$ et il s'en suit que $u = s_W$. □

2 Éléments de classification des formes quadratiques

On se propose désormais étant donner un corps K de caractéristique différente de 2 et un entier $n \in \mathbb{N}^*$, de chercher à établir des invariants sous le groupe linéaire $\mathrm{GL}(V)$ des formes quadratiques sur $V = K^n$, voire une classification sous de bonnes conditions.

2.1 Écriture matricielle

Définition 2.1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une K-base de V et $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale dans V^* de $\mathcal{B}$. On définit $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = (b_q(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$.

Fait 2.2. *On a* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*}(\Phi)$. *où* Φ *désigne le morphisme fondamental* $\Phi(v) = (w \mapsto b_q(v, w))$.

Démonstration. Soit $w = \sum_{j=1}^n w_j e_j \in V$. Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\Phi(e_i)(w) = b_q(e_i, w) = \sum_{j=1}^n b_q(e_i, e_j) w_j = \sum_{j=1}^n b_q(e_i, e_j) e_j^*(w)$. Donc $\Phi(e_i) = \sum_{j=1}^n b_q(e_i, e_j) e_j^*$. D'où l'égalité matricielle. $\square$

Corollaire 2.3. *Si* $x, y \in V$ *et* $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x), Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y) \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$, *alors* $b_q(x, y) = {}^tX \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) \cdot Y$ *et* $q(x) = {}^tX \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) \cdot Y$.

Proposition 2.4. q *est non dégénérée* $\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) \in \mathrm{GL}_n(K)$.

Ceci ne dépend pas de la base choisie.

Démonstration. On le fait par contraposition.

$\Rightarrow$: Si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ n'est pas inversible, alors il existe $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ non nulle telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) Y = 0$. Donc pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$, on a ${}^tX \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) \cdot Y = 0$. Ainsi, la matrice Y représente un vecteur $y \in V^\perp \setminus \{0\}$.

$\Leftarrow$: Si q est dégénérée, alors il existe $x \in V^\perp \setminus \{0\}$. Ainsi, pour tout $u \in V$, on a $b_q(x, y) = 0$. Soit $j \in [\![1, b]\!]$ tel que $x_j \neq 0$. Si, par l'absurde $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ est inversible, alors il existe $y \in V$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) Y = E_j$. Donc $b_q(x, y) = {}^tX E_j = x_j = 0$. Contradiction. $\square$

Proposition 2.5 (Formule de changement de base)**.** *Si* $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ *sont deux bases, si* $P = (\lambda_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ *où* $e_j' = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} e_i$, *alors* ${}^tP \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(q)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(q) &= \left[b_q(e_i', e_j')\right]_{i,j} \\
&= \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \lambda_{k,i} \lambda_{l,j} b_q(e_k, e_l)\right]_{i,j} \\
&= \left[\sum_{k=1}^n \lambda_{k,i} \sum_{l=1}^n b_q(e_k, e_l) \lambda_{l,j}\right]_{i,j} \\
&= \left({}^tP \left[\sum_{l=1}^n b_q(e_k, e_l) \lambda_{l,j}\right]\right)_{i,j} \\
&= {}^tP \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) P
\end{aligned}$$

$\square$

Définition 2.6. On dit que deux matrices M, M' sont congruentes, s'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ telle que ${}^tPMP = M'$.

Proposition 2.7. *Deux formes quadratiques* q, q' *sont équivalentes si, et seulement si, les matrices* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ *et* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q')$ *sont congruentes.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}
q' = q \circ u &\Leftrightarrow b_{q'}(e_i, e_j) = b_q(u(e_i), u(e_j)) \quad \forall 1 \leq i, j \leq n \\
&\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q') = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)
\end{aligned}$$

$\square$

2.2 Algorithme de Gauss de réduction des formes quadratiques

Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie n avec $\mathrm{car}(K) \neq 2$.

Définition 2.8 (Bases orthogonales)**.** Soit q une forme quadratique. Une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de V est dite *q-orthogonale* (ou orthogonale par rapport à q) si pour tous $i \neq j \in [\![1, n]\!]$, on a $b_q(e_i, e_j) = 0$.

Si, de plus, on a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ l'égalité $b_q(e_i, e_i) = q(e_i) = 1$, alors on dit que $\mathcal{B}$ est *q-orthonormale* (ou orthonormée par rapport à q).

Fait 2.9. *$\mathcal{B}$ est q-orthogonale si, et seulement si,* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ *est diagonale.*

Théorème 2.10 (Théorème de réduction de Gauss)**.** *Soit q une forme quadratique sur V. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ qui est q-orthogonale.*

De plus, le rang de q est le rang de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$*, autrement dit si* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_r, 0, \dots, 0)$ *est de rang r, alors* $r = \dim V - \dim \ker q$.

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base V.

Comme $\mathrm{car}(K) \neq 2$, on a vu dans le cours sur les polynômes en n-indéterminées qu'on peut identifier les formes linéaires aux polynômes homogènes de degré 1 en n variables et les formes quadratiques aux polynômes homogènes de degré 2.

Il suffit de montrer que tout polynôme homogène Q de degré 2 en n variables $X_1, \dots, X_n$ s'écrit sous la forme

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i^2, \tag{1}$$

où $L_1, \cdots, L_n$ sont des polynômes homogènes de degré 1 en $X_1, \cdots, X_n$ linéairement indépendants et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K^\times$. En effet, si cette assertion est vraie, alors les formes linéaires associées aux L_i forment une base de V^*, et il suffit de considérer la base $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots e'_n)$ antéduale de celle-ci. On a alors

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x'_i)^2$$

où x est de coordonnées $(x'_1, \cdots, x'_n)$ dans $\mathcal{B}'$ par construction. On en déduit immédiatement que $\mathcal{B}'$ est orthogonale pour q.

Nous allons donc démontrer le théorème de Gauss pour les polynômes homogènes de degré 2 en n variables par récurrence sur n.

Si $n = 0$ ou 1, c'est immédiat. Supposons maintenant que le théorème est vrai jusqu'au rang $n - 1$ avec $n \geq 2$, nous allons le montrer pour n.

Soit $Q \in K[X_1, \dots, X_n]$ homogène de degré 2, on l'écrit sous la forme

$$Q = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} X_i X_j.$$

• Premier cas : il existe i tel que $a_i \neq 0$.

Quitte à permuter les variables, on peut supposer que $a_1 \neq 0$ puis même que $a_1 = 1$ (car si Q/a_1 vérifie (1), Q également en multipliant les coefficients λ_i par a_1).

On peut alors écrire

$$Q = X_1^2 + 2X_1 \sum_{j=2}^{n} a_j X_j + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n} a_{ij} X_i X_j$$
$$Q = X_1^2 + 2X_1 L + Q_1$$

avec L et Q_1 des formes respectivement linéaire et quadratique en $n - 1$ variables $X_2, \dots, X_n$. On écrit alors

$$Q = (X_1 + L)^2 + (Q_1 - L^2),$$

et on choisit $\lambda_1 = 1, L_1 = x_1 + L$. Par hypothèse de récurrence, comme $Q_1 - L^2$ est une forme quadratique en $n - 1$ variables $X_2, \dots, X_n$, on a

$$Q_1 - L^2 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i L_i^2,$$

et il ne reste plus qu'à montrer que $L_1, \cdots, L_n$ sont bien linéairement indépendantes. Les formes $L_2, \cdots, L_n$ le sont par construction, mais elles s'annulent toutes en $(1, 0, \cdots, 0)$ alors que L_1 non. On a donc bien l'indépendance linéaire.

• Deuxième cas : pour tout i, on a $a_i = 0$.

A moins que Q soit nul (cas immédiatement résolu), on peut supposer quitte à permuter les variables et normaliser que $a_{12} = 1/2$. Ceci permet d'écrire (suivant les mêmes idées qu'auparavant)

$$Q = x_1 x_2 + x_1 L^{(1)} + x_2 L^{(2)} + Q_1$$

avec L, L', Q_1 respectivement linéaire, linéaire et quadratique, qui dépendent seulement des variables $X_3, \ldots, X_n$. On peut réécrire ceci

$$\begin{aligned} Q &= (x_1 + L^{(2)})(x_2 + L^{(1)}) + (Q_1 - L^{(1)} L^{(2)}) \\ &= \frac{1}{4} \left(L_1^2 - L_2^2 \right) + Q_2 \end{aligned}$$

avec

$$L_1 = x_1 + x_2 + L^{(1)} + L^{(2)}, \qquad L_2 = x_1 - x_2 - L^{(1)} + L^{(2)}, \qquad Q_2 = Q_1 - L^{(1)} L^{(2)}.$$

Par hypothèse de récurrence, on peut écrire

$$Q_2 = \sum_{i=3}^{n} \lambda_i L_i^2,$$

avec $L_3, \cdots, L_n$ linéaires en $X_3, \ldots, X_n$ et linéairement indépendantes. En insérant cette formule dans l'expression ci-dessus, on obtient (1) pour Q. Pour l'indépendance linéaire, on observe que $L_3, \cdots, L_n$ engendrent en fait toutes les formes linéaires en $x_3, \cdots, x_n$, en particulier les formes $X_3, \ldots, X_n$. En conséquence, vu les définitions de L_1 et L_2, les formes linéaires $L_1, \cdots, L_n$ engendrent $X_1 + X_2$ et $X_1 - X_2$, donc X_1, X_2. Ceci prouve que cette famille engendre les polynômes linéaires en n variables, de dimension n, donc la famille est une base, en particulier libre. □

2.3 Application à la classification des formes quadratiques

Notation 2.11. On note $K^{\times 2}$ le sous-groupe de $K^\times$ constitué par les carrés de K.

Corollaire 2.12. *Si K est un corps algébriquement clos de caractéristique $\mathrm{car}(K) \neq 2$, alors le rang est un invariant total pour l'action de $\mathrm{GL}(V)$ par équivalence sur les formes quadratiques sur V.*

En particulier, il y a exactement $n+1$ classes d'équivalences.

Enfin, une forme quadratique q admet une base q-orthonormée si, et seulement si, elle est non dégénérée.

Démonstration. Comme K est algébriquement clos, on a $K^\times = K^{\times 2}$.

Si q est une forme quadratique, alors il existe $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base q-orthogonale telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0)$ avec $\lambda_i \in K^\times$. On note $\lambda_i = q(e_i)$ et $\mu_i \in K^\times$ tel que $\mu_i^2 = \lambda_i$. Alors la base $\mathcal{B}'$ donnée par $e_i' = \begin{cases} \frac{e_i}{\mu_i} & \text{si } i \leq r \\ e_i & \text{sinon } \lambda_i \neq 0 \end{cases}$ vérifie $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(q) = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{r \text{ termes}}, 0, \ldots, 0)$.

q et q' sont équivalentes $\iff$ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(q)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(q')$ sont congruentes. Les orbites sont alors décrites par le rang. □

Théorème 2.13 (Loi d'inertie de Sylvester). *Si $K = \mathbb{R}$, alors toute forme quadratique sur $V \simeq \mathbb{R}^n$ est équivalente à $\mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{s}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{r-s}, 0, \ldots, 0)$ avec $0 \leq s \leq r = \mathrm{rg}(q)$.*

De plus s est la dimension maximale d'un sous-espace de V sur lequel q est définie positive.

La quantité $q \mapsto (r, s)$ est un invariant totale d'équivalence des formes quadratiques réelles. On l'appelle la signature *de q.*

Démonstration. Il suffit de voir que $\mathbb{R}^{\times 2} = \mathbb{R}_+^*$. □

Corollaire 2.14. *Sur $\mathbb{R}^n$, il y a exactement $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ classes d'équivalences de formes quadratiques.*

Démonstration. Ce nombre est $\sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{r} 1 = \sum_{r=0}^{n} (r+1)$. □

Théorème 2.15. *Si K est un corps fini de caractéristique* $\mathrm{car}(K) \neq 2$*, alors* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ *est congruente à* $\mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r-1}, d, 0, \ldots, 0)$ *avec* $d = \mathrm{disc}(q)$ *et* $r = \mathrm{rg}(q)$.

Ainsi, $q \mapsto (r, d) = (\mathrm{rg}(q), \mathrm{disc}(q))$ *est un invariant total classifiant les formes quadratiques sur un corps fini.*

3 Espaces quadratiques et éléments de théorie de Witt

Définition 3.1. Soient (V_1, q_1) et (V_2, q_2) des espaces quadratiques. On définit leur somme orthogonale $(V, q) = (V_1, q_1) \oplus (V_1, q_1)$ par $V = V_1 \times V_2$ et $q(x_1, x_2) = q_1(x_1) + q_2(x_2)$ pour $x_1 \in V_1$ et $x_2 \in V_2$.

Soit (V, q) un espace quadratique. Si V_1, V_2 sont des sous-espaces de V qui sont q-orthogonaux et en somme directe, alors on peut identifier (V, q) à la somme orthogonale de $(V_1, q|_{V_1})$ et $(V_2, q|_{V_2})$.

Exemple 3.2. Si (V, q) est un espace quadratique réel et si V_1 et V_2 sont deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux de V, de signatures respectives (r_1, s_1) et (r_2, s_2), alors V est de signature $(r_1 + r_2, s_1 + s_2)$. C'est immédiat par forme réduite de Gauss.

3.1 Décomposition d'un espace quadratique

Définition 3.3. On appelle *plan hyperbolique* un espace quadratique (V, q) avec $\dim(V) = 2$ vérifiant les conditions équivalentes suivantes :

(i) (V, q) est isomorphe au plan hyperbolique (K^2, q) où $q(x, y) = xy$;

(ii) (V, q) est isomorphe au plan hyperbolique (K^2, q) où $q(x, y) = x^2 - y^2$;

(iii) (V, q) est non-dégénéré et admet un vecteur non nul isotrope ;

(iv) (V, q) est non-dégénéré et de discriminant -1.

Exercice 1. Pour familiariser le lecteur à cette définition, on lui laisse de soit de vérifier l'équivalence.

Définition 3.4. On appelle espace hyperbolique un espace quadratique (V, q) qui se décompose en somme orthogonale de plans quadratiques.

On rappelle qu'un espace (V, q) est dit totalement isotrope si $C(q) = V$.

On rappelle qu'un espace (V, q) est dit anisotrope si $C(q) = 0$.

Si (V, q) est un espace quadratique, on parlera de sous-espace totalement isotrope, abrégé par *seti*, et de sous-espace totalement isotrope maximal, abrégé par *setim.*

Exemple 3.5. Un espace hyperbolique est non-dégénéré et de dimension paire par définition.

Si (V, q) est un espace hyperbolique réel de dimension $2d$, alors il est de signature (d, d).

Si (V, q) est un espace totalement isotrope réel, alors il est de signature $(0, 0)$.

Si (V, q) est un espace anisotrope réel de signature (r, s), alors $r = 0$ ou $s = 0$.

Proposition 3.6. *Soit (V, q) un espace quadratique et U un seti de V. Alors il existe un sous-espace hyperbolique H de V contenant U de dimension* $\dim(H) = 2\dim(U)$.

Démonstration. On procède par récurrence sur $d = \dim(U)$.

Si $d = 1$, on écrit $U = Kx$ avec $x \neq 0$. Il existe $y \in V \setminus U$ tel que $\varphi_q(x, y) \neq 0$ car q est non-dégénérée. On pose alors $P = \mathrm{Vect}(x, y)$ qui est donc de dimension $2d = 2\dim(U)$. Comme P contient un vecteur isotrope, il suffit de montrer que $(P, q|_P)$ est non-dégénéré. Or c'est le cas car $\mathrm{Mat}_{(x,y)}(q) = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_q(x,y) \\ \varphi_q(x,y) & q(y) \end{pmatrix}$ est de déterminant $\varphi_q(x, y)^2 \neq 0$. Ainsi, on a bien la propriété lorsque $d = 1$.

Supposons désormais $d > 1$ et choisissons une base $(x_1, \ldots, x_d)$ de U. Soit $W = \mathrm{Vect}(x_2, \ldots, x_d) \subset U$. On a alors $W^\perp \supset U^\perp$. Comme q est non-dégénérée, on sait que $\dim(U^\perp) = \dim(V) - \dim(U)$ et $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W) = \dim(V) - (d-1) = \dim(U^\perp) + 1$. Ainsi $U^\perp$ est un hyperplan de $W^\perp$.

Soit $y \in W^\perp \setminus U^\perp$ et $P = \mathrm{Vect}(x_1, y)$. Montrons que $P^\perp \cap U$ est un hyperplan de U. Comme q est non dégénérée, on sait que $P^\perp = (Kx_1 \oplus Ky)^\perp = x_1^\perp \cap y^\perp$. Mais $x_1 \in U$ donc $U^\perp \subset x_1^\perp$. De plus $U \subset U^\perp$ car U est totalement isotrope. Donc $U \subset x_1^\perp$ et $P^\perp \cap U = y^\perp \cap U$. Comme $y^\perp = \ker \ell_\varphi(y)$ est un hyperplan de V, il suffit de voir que la forme linéaire $\ell_\varphi(y)$ est non-nulle sur U. En effet, comme q est non-dégénérée, si on avait $U \subset y^\perp$, alors on aurait $Ky \subset U^\perp$, ce qui est exclu par hypothèse sur y. Ainsi $P^\perp \cap U$ est bien un hyperplan de U.

De plus $P^\perp \cap U$ est un seti de $P^\perp$ par construction et comme $P \cap P^\perp = 0$, on sait que $q|_{P^\perp}$ est non-dégénérée. Ainsi, par hypothèse de récurrence, il existe un sous-espace hyperbolique H de $P^\perp$ de dimension $2(d-1)$ contenant $P^\perp \cap U$. L'espace $P \overset{\perp}{\oplus} H$ est donc un sous-espace hyperbolique de V de dimension $2d$ contenant U. □

Corollaire 3.7. *Si (V, q) est un espace quadratique, alors il se décompose en somme une somme directe orthogonale pour q de la forme $V = V_{\mathrm{ti}} \overset{\perp}{\oplus} V_{\mathrm{an}} \overset{\perp}{\oplus} V_{\mathrm{hyp}}$ où $V_{\mathrm{ti}} = \ker q$ est totalement isotrope, l'espace V_{an} est anisotrope et l'espace V_{hyp} est hyperbolique.*

Démonstration. Il est clair que (V, q) se décompose en $\ker q \overset{\perp}{\oplus} V_{\mathrm{nd}}$ où V_{nd} est non-dégénéré par définition du noyau de q. On suppose donc sans restriction que $V = V_{\mathrm{nd}}$ et que q est non-dégénérée.

Soit U un setim de V, ce qui existe car V est de dimension finie. La proposition précédente donne l'existence de H hyperbolique contenant U. En particulier $q|_H$ est non-dégénérée donc $V = H \overset{\perp}{\oplus} H^\perp$. On montre alors que $H^\perp$ est anisotrope. En effet, si $x \in H^\perp$ est un vecteur isotrope, alors Kx est orthogonal à H, donc en particulier à U. Donc $W = U \oplus Kx$ est encore un seti. Par maximalité de U, on a donc $x = 0$. □

3.2 Sous-espaces totalement isotropes et indice

Définition 3.8. Soit (V, q) un espace quadratique. On appelle *indice* de q l'entier, noté $\nu(q)$, défini comme étant le maximum de la dimension d'un setim de V.

Remarque 3.9. Si V est isotrope, alors $\nu(q) \geqslant 1$. Si V est anisotrope, alors $\nu(q) = 0$.

Si (V, q) est un espace quadratique réel de signature (r, s), alors $\nu(q) \geqslant \min(r, s) + \dim(\ker q)$.

Fait 3.10. *Si (V, q) est un espace quadratique non-dégénéré, alors $\nu(q) \leqslant \frac{\dim(V)}{2}$.*

Démonstration. Soit W un seti. Alors $W \subset W^\perp$. Comme q est non-dégénérée, on a donc $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W) \geqslant \dim(W)$. Le résultat découle alors de la définition $\nu(q) = \max\{\dim(W),\ W \text{ est un seti}\}$. □

Proposition 3.11. *Si (V, q) est un espace quadratique réel non-dégénéré de signature (r, s), alors $\nu(q) = \min(r, s)$.*

Démonstration. On sait déjà que $\nu(q) \geqslant \min(r, s)$. Soit W un seti de dimension $d \leqslant \nu(q)$. Soit H un sous-espace hyperbolique de V contenant W de dimension $2d$. On a vu que $V = H \overset{\perp}{\oplus} H^\perp$ et que la signature de q sur H est (d, d). Si la signature de q sur $H^\perp$ est (r', s'), alors celle de q est $(d + r', d + s')$. Comme $H^\perp$ est anisotrope, on a $r' = 0$ ou $s' = 0$. D'où $d \leqslant \min(r, s)$. Ainsi $\nu(q) \leqslant \min(r, s)$ par définition, ce qui conclut. □

3.3 Un théorème de Witt

Lemme 3.12. *Soit (V, q) un espace quadratique. Si $q(x) = q(y) \neq 0$, alors $q(x + y) \neq 0$ ou $q(x - y) \neq 0$.*

Démonstration. Cela découle d'un calcul élémentaire. □

Théorème 3.13 (Witt)**.** *Soit (V, q) un espace quadratique non-dégénéré et W, W' des sous-espaces. Si $\sigma : W \to W'$ est une isométrie relativement à $(W, q|_W)$ et $(W', q|_{W'})$, alors σ se prolonge en une isométrie de (V, q), c'est-à-dire qu'il existe $u \in \mathcal{O}(q)$ tel que $u|_W = \sigma$.*

Démonstration.

Cas où W est non-dégénéré : On procède par récurrence sur $d = \dim(W)$.

Si $d = 1$, on écrit $W = Kx$ avec $q(x) \neq 0$. Soit $y = \sigma(x)$ de sorte que $q(y) = q(x) \neq 0$. Par le lemme, il existe un signe $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tel que $q(x + \varepsilon y) \neq 0$. Soit $H = (x + \varepsilon y)^\perp$. C'est un hyperplan non-dégénéré de V car $x + \varepsilon y$ n'est pas isotrope. Soit $s_H \in \mathcal{O}(q)$ la réflexion orthogonale d'hyperplan H. Comme $x - \varepsilon y \in H$, on a $s_H(x) = -\varepsilon y$ donc $-\varepsilon s_H(x) = y$. Ainsi $-\varepsilon s_H$ prolonge σ.

Hérédité : On suppose le résultat connu pour W non-dégénéré de dimension $\leqslant d - 1$. Soit $(x_1, \ldots, x_d)$ une base q-orthogonale de W et $W_1 = Kx_1$, $W_2 = \mathrm{Vect}(x_2, \ldots, x_d)$ de sorte que $W = W_1 \overset{\perp}{\oplus} W_2$ avec

W_1, W_2 non-dégénérés. Par hypothèse de récurrence, on sait que $\sigma_1 = \sigma|_{W_1}$ se prolonge à V en $\tau_1 \in \mathcal{O}(q)$. Quitte à changer σ en $\tau_1^{-1} \circ \sigma$, on peut supposer que $\sigma_1 = \mathrm{id}_{W_1}$. Comme $W_2 \subset W_1^\perp$, on en déduit $\sigma(W_2) \subset W_1^\perp$. Par hypothèse de récurrence appliquée à W_2 vu comme sous-espace de $W_1^\perp$, on en déduit un prolongement de $\sigma_2 = \sigma|_{W_2}$ en $\tau_2 \in \mathcal{O}(W_1^\perp, q)$. L'isométrie $u = \mathrm{id}_{W_1} \overset{\perp}{\oplus} \tau_2 \in \mathcal{O}(q)$ étend alors σ.

Cas général : On écrit $W = W_0 \overset{\perp}{\oplus} U$ avec $W_0 = \ker q|_W$ et U non-dégénéré. Comme σ est une isométrie, on a $\sigma(W) = W' = \sigma(W_0) \overset{\perp}{\oplus} \sigma(U)$ et $\sigma(W_0) = \ker q|_{W'}$. Soit $(x_1, \dots, x_d)$ une base de W_0. Comme W_0 est un seti de dimension d, il est contenu dans un sous-espace hyperbolique H de dimension $2d$ et on peut trouver des vecteurs $(y_1, \dots, y_d)$ tels que les sous-espaces $P_i = \mathrm{Vect}(x_i, y_i)$ de H sont des plans hyperboliques pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$, en somme orthogonale. Posons $x_i' = \sigma(x_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant d$. Alors $(x_1', \dots, x_d')$ est une base de $\sigma(W_0) = \ker q|_{W'}$ et on peut donc trouver un sous-espace hyperbolique H' contenant W' et des vecteurs y_i' tels que les sous-espaces $P_i' = \mathrm{Vect}(x_i', y_i')$ sont des plans hyperboliques en somme orthogonale. On pose alors $G = H \overset{\perp}{\oplus} U$ et $G' = H' \overset{\perp}{\oplus} \sigma(U)$. Alors les sous-espaces G, G' sont non-dégénérés et on peut prolonger σ en une isométrie $\tau : G \to G'$ en posant $\tau(y_i) = y_i'$. On peut alors étendre τ en une isométrie $u \in \mathcal{O}(q)$ en appliquant le cas non-dégénéré. $\square$

Théorème 3.14 (Witt)**.** *Soit (V, q) un espace quadratique non-dégénéré. Soient W, W' deux sous-espaces de V. S'équivalent :*

(i) il existe $u \in \mathcal{O}(q)$ tel que $u(W) = W'$;

(ii) les formes quadratiques $q|_W$ et $q|_{W'}$ sont équivalentes ;

(iii) il existe une isométrie $\sigma : W \to W'$, relativement à $q|_W$ et $q|_{W'}$.

Démonstration. On a clairement $(i) \Rightarrow (iii) \Leftrightarrow (ii)$. Enfin $(iii) \Rightarrow (i)$ découle du théorème précédent. $\square$

Corollaire 3.15. *Soit (V, q) un espace quadratique non-dégénéré. Alors tous les setim de V ont même dimension $\nu(q)$.*

Démonstration. Soit W un seti et W' un setim. Supposons par l'absurde que $\dim(W) > \dim(W')$. Soit $W_1 \subset W$ tel que $\dim(W_1) = \dim(W')$. Par le théorème de Witt, il existe une isométrie $u \in \mathcal{O}(q)$ de V telle que $u(W_1) = W'$. On a donc $u(W) \supset W'$ et $u(W) \neq W'$ avec $u(W)$ totalement isotrope. Cela contredit la maximalité de W'. Ainsi, la dimension d'un seti est toujours majorée par $\nu(q)$ et cette dimension est attente en tout setim. $\square$

Corollaire 3.16. *Soit (V, q) un espace quadratique non-dégénéré. Soient $V = V_{\mathrm{an}} \overset{\perp}{\oplus} V_{\mathrm{hyp}} = V'_{\mathrm{an}} \overset{\perp}{\oplus} V'_{\mathrm{hyp}}$ deux décompositions de V avec $V_{\mathrm{an}}, V'_{\mathrm{an}}$ anisotropes et $V_{\mathrm{hyp}}, V'_{\mathrm{hyp}}$ hyperboliques. Alors* $\dim V_{\mathrm{hyp}} = \dim V'_{\mathrm{hyp}} = 2\nu(q)$ *et il existe une isométrie $u \in \mathcal{O}(q)$ telle que $u(V_{\mathrm{hyp}}) = V'_{\mathrm{hyp}}$ et $u(V_{\mathrm{an}}) = V'_{\mathrm{an}}$.*

Démonstration. On sait déjà qu'une telle décomposition existe. Soit W un setim de V_{hyp}. On a alors $\dim V_{\mathrm{hyp}} = 2 \dim W$ et $W \overset{\perp}{\oplus} V_{\mathrm{an}} \subset W^\perp$. Donc $W \overset{\perp}{\oplus} V_{\mathrm{an}} = W^\perp$ pour des raisons de dimension. Soit $x \in W^\perp$ qu'on écrit alors $x = y + z$ avec $y \in W$ et $z \in V_{\mathrm{an}}$. Alors $q(x) = q(z)$ Comme $q|_{V_{\mathrm{an}}}$ est anisotrope par définition, on sait que si $x \notin W$, alors x est anisotrope. Donc W est encore un setim de V, donc de dimension $\nu(q)$ par le corollaire précédent.

Ainsi $\dim V_{\mathrm{hyp}} = \dim V'_{\mathrm{hyp}} = 2\nu(q)$. Ces espaces hyperboliques sont de même dimension, donc isométriques. D'après le théorème de Witt, il existe donc $u \in \mathcal{O}(q)$ telle que $u(V_{\mathrm{hyp}}) = V'_{\mathrm{hyp}}$. On a alors $u(V_{\mathrm{an}}) = u(V_{\mathrm{hyp}}^\perp) = (V'_{\mathrm{hyp}})^\perp = V'_{\mathrm{an}}$. $\square$

Par conséquence, à équivalence près, un espace quadratique (V, q) se décompose de manière unique en somme directe $(V, q) = (\ker q, 0) \overset{\perp}{\oplus} (V_{\mathrm{an}}, q_{\mathrm{an}}) \overset{\perp}{\oplus} (V_{\mathrm{hyp}}, q_{\mathrm{hyp}})$. On dira que q_{an} est la partie anisotrope de q et q_{hyp} est la partie hyperbolique de q, toutes deux définies à équivalence près.

Corollaire 3.17. *Deux formes quadratiques sur V sont équivalentes si, et seulement si, elles ont :*

— *même rang ;*

— *même indice $\nu(q)$;*

— *même partie anisotrope.*

Autrement dit, pour classifier les formes quadratiques sur un corps, il « suffit » de savoir classifier les formes anisotropes.

Exercice 2. Réinterpréter la classification des formes quadratiques sur $\mathbb{C}$, sur $\mathbb{R}$, sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ avec q impair au regard de ce corollaire.

4 Application à la géométrie : coniques et quadriques

L'enjeu de cette dernière partie est de classifier les coniques et quadriques en dimension 2 et 3, dans le cadre réel uniquement. Le lecteur est néanmoins invité à s'interroger sur les généralisations à des corps algébriquement clos ou finis par exemple.

En première approximation, une conique c'est l'intersection d'un cône de $\mathbb{R}^3$ et d'un plan de $\mathbb{R}^3$.

Définition 4.1. Un cône de $\mathbb{R}^3$ est une partie C telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in C$, on a $tx \in C$.

On observe alors qu'un cône c'est en fait un objet projectif qu'on peut comprendre comme union de droites vectorielles, i.e. de points du plan projectif : à $(x, y, z) \in (C \setminus \{0\}) \subset (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, on associe $[x : y : z] = \mathbb{R}(x, y, z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Fait 4.2. *Si $P \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ est un polynôme homogène de degré d, alors $\mathcal{Z}(P) = \{(x, y, z),\ P(x, y, z) = 0\}$ est un cône de $\mathbb{R}^3$.*

Lorsqu'on s'intéresse au lieu des zéros d'une forme quadratique, on est alors naturellement amené à considérer tout d'abord le cadre projectif.

4.1 Coniques projectives

On se place dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \Big(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\Big)/\mathbb{R}^*$. Classifier les coniques projectives, c'est faire agir $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ sur l'espace des quadriques et étudier les orbites de cette action.

L'ensemble des polynômes de degré 2 en 3 variables est l'espace vectoriel :

$$\{aX^2 + bXY + cY^2 + dXZ + eYZ + fZ^2,\ a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}\}$$

de dimension 6 sur $\mathbb{R}^3$.

Définition 4.3. Une conique projective est le lieu d'annulation $\mathcal{Z}(P)$ d'un polynôme homogène non nul $P \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ de degré 2 en 3 variables, autrement dit c'est

$$Z(P) = \{[x : y : z],\ ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2\}$$

ou encore c'est le projectifié du cône isotrope

$$Z(P) = \mathbb{P}\Big(C(Q) \setminus \{0\}\Big) \qquad \text{où} \qquad \mathrm{Mat}(Q) = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix}.$$

Deux coniques projectives sont dites *isomorphes* si ce sont les coniques de deux formes quadratiques équivalentes.

Définition 4.4. Une conique projective est dite *non-dégénérée* si Q est non-dégénérée, et *propre* si elle est non-dégénérée et non-vide.

Par une vérification élémentaire

Fait 4.5. *Pour $M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ l'image de $M^{-1} \mod \mathbb{R}^* I_3$, alors*

$$C({}^tMQM) = \varphi(C(Q))$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a

$$C(\lambda Q) = C(Q)$$

On en déduit, par la loi d'inertie de Sylvester, la classification des coniques du plan projectif réel :

cas $(+ + +) = (- - -)$ **:** $Q \sim x^2 + y^2 + z^2$ et $C(Q) = 0$ donc $Z(P) = \emptyset$ est non-dégénérée mais impropre ;

cas $(+ + -) = (+ - -)$ **:** $Q \sim x^2 + y^2 - z^2$ est non-dégénérée et propre (c'est la seule à isomorphisme près) ; on a, dans la carte affine,

- $(z = 1)$ $Z(P) \cap (z = 1)$ est une ellipse (un cercle) ;
- $(y = 1)$ $Z(P) \cap (y = 1)$ est une hyperbole ;
- $z = 1 + y$ $Z(P) \cap (z = 1 + y)$ est une parabole ;

cas $(++0) = (--0)$ $Q \sim x^2 + y^2$ et $C(Q) = \mathbb{R}(0,0,1)$ donc $Z(P) = \{[0:0:1]\}$ est un point ;

cas $(+-0)$ $Q \sim x^2 - y^2$ et $C(Q)$ est la réunion de deux plans $\mathbb{R}(1,1,0) + \mathbb{R}(0,0,1)$ et $\mathbb{R}(1,-1,0) + \mathbb{R}(0,0,1)$, donc $Z(P)$ est la réunion de deux droites ;

cas $(+00) = (-00)$ $Q \sim x^2$ et $C(Q) = 0 \times \mathbb{R}^2$ est un plan donc $Z(P)$ est une droite.

En résumé

Théorème 4.6. *À équivalence projective près, il existe une unique conique projective propre du plan projectif. La seule conique projective impropre non-dégénérée est la conique vide et une conique dégénérée est soit un point, soit une droite, soit une union de deux droites.*

Remarque 4.7. Dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ il y a deux classes de coniques propres :

— la signature lorentzienne $(+++-)$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$;

— la signature neutre $(++--)$ d'équation $xy + zt = 0$.

Elles n'ont pas le même indique de Witt $\nu(Q)$, ce qui permet de les distinguer.

La conique lorentzienne ne contient pas de droites alors que la conique neutre en contient.

4.2 Coniques affines

Soit $\mathbb{A}$ un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2. Classifier les coniques affines, c'est faire agir $\mathrm{Aff}(\mathbb{A}) \simeq \mathbb{R}^2 \rtimes \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ sur l'espace des coniques et étudier les orbites de cette action.

Définition 4.8. Une *conique affine* de $\mathbb{A}$ est le lieu d'annulation $\mathcal{C}(P)$ d'un polynôme P non nul de degré inférieur à 2 en 2 variables.

Dans le plan affine, un polynôme de degré 2 en 2 variables s'écrit :

$$P = aX^2 + bXY + cY^2 + dX + eY + f$$

Plus intrinsèquement, c'est une fonction $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ sur un espace affine $\mathbb{A}$ de dimension 2 du type

$$f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + \lambda(\overrightarrow{OM}) + \kappa$$

avec

— $O \in \mathbb{A}$,

— q forme quadratique sur $\overrightarrow{\mathbb{A}}$,

— λ forme linéaire sur $\overrightarrow{\mathbb{A}}$,

— $\kappa \in \mathbb{R}$.

On associe à $P \in \mathbb{R}[X,Y]$ son homogénéisé $Q \in \mathbb{R}[X,Y,Z]$ donné par

$$Q(X,Y,Z) = Z^2 P(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z})$$

de sorte que $P(X,Y) = Q(X,Y,1)$.

Fait 4.9. *La conique $\mathcal{C}(P)$ est l'intersection du cône isotrope $C(Q)$ avec le plan d'équation $Z = 1$.*

Définition 4.10. On dit que $\mathcal{C}(P)$ est propre si la forme quadratique Q est non-dégénérée et non-définie.

Théorème 4.11. *Toute conique propre est affinement équivalente à l'une des 3 coniques suivantes :*

1. *l'ellipse $(x^2 + y^2 = 1)$;*
2. *la parabole $(y = x^2)$;*
3. *l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$.*

Démonstration. On suppose $Q(X,Y,Z) = q(X,Y) + \lambda(X,Y)Z + \kappa Z^2$ non-dégénérée.

On suppose q non-dégénérée : On écrit $q = \pm\eta^2 + \pm\xi^2$ avec (η, ξ) une base de formes linéaires de $\mathbb{R}^2$ via une méthode de Gauss. Alors λ est une combinaison linéaire de η et ξ qu'on écrit $\lambda = 2c_\eta\eta + 2c_\xi\xi$. Ainsi il existe une constante $c_0 \in \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} Q =& q + Z\lambda + \kappa Z \\ =& \pm (\eta + c_\eta)^2 \pm (\xi + c_\xi)^2 + c_0 Z^2 \end{aligned}$$

Après changement de variable affine, la conique $\mathcal{C}(P)$ a pour équation :

— soit $X^2 + Y^2 + C = 0$ (ellipse) ;

— soit $X^2 - Y^2 + C = 0$ (hyperbole).

En effet, dans le premier cas $C \neq 0$ car Q est non-dégénérée et $C < 0$ car Q est non-définie.

On suppose q dégénérée : On écrit alors $q = \pm\eta^2$. À changement de variable affine près, on a alors

$$\begin{aligned} Q =& aX^2 + dXZ + eYZ + fZ^2 \\ =& a\left(X + \frac{d}{2a}Z\right) + eYZ + f'Z^2 \end{aligned}$$

pour un certain $f' \in \mathbb{R}$. Comme Q est non-dégénérée, on a nécessairement $e \neq 0$. Enfin l'évaluation en $Z = 1$ donne l'équation d'une parabole. □

Remarque 4.12. Le type de la conique se lit directement sur $q = aX^2 + bXY + cY^2$ et sur $Q = aX^2 + bXY + cY^2 + dXZ + eYZ + fZ^2$:

— si Q est définie, la conique est impropre, sinon :

— si $\mathrm{disc}(q) = 0$ (i.e. q est dégénérée), c'est une parabole ;

— si $\mathrm{disc}(q) > 0$, c'est une ellipse ;

— si $\mathrm{disc}(q) < 0$, c'est une hyperbole.

4.3 Quadriques affines (esquisse)

Soit $\mathbb{A}$ un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension finie n.

Définition 4.13. On appelle quadrique affine la classe d'équivalence d'un polynôme f de degré 2 en n variables pour la relation d'équivalence $f \sim g \iff \exists t \in \mathbb{R}^*,\ f = tg$.

L'ensemble $\{M \in \mathbb{E},\ f(M) = 0\}$ s'appelle l'image de la quadrique $[f]$.

Remarque 4.14. On ne veut pas appeler l'image une quadrique car il est clair qu'on ne veut pas confondre $[x^2 + 1 = 0]$ avec $[x^2 + y^2 + 1 = 0]$.

On décompose f en $f = q + \lambda + \kappa$ où

— q est homogène de degré 2 ;

— λ est homogène de degré 1 ;

— κ est une constante.

Définition 4.15. On dit que $[f]$ est non-dégénérée (resp. propre) si l'homogénéisé Q de f est une forme quadratique non-dégénérée (resp. non dégénérée et non-définie).

Fait 4.16. *Pour $g = f(\cdot - x_0)$, l'image de $[g]$ est un translaté de l'image de $[f]$.*

On veut savoir s'il existe $x_0 \in \mathbb{A}$ tel que $2b_q(\cdot, x_0) - \lambda = 0$, autrement dit si $[f]$ a un unique centre x_0.

Théorème 4.17. *La quadrique $[f]$ est à centre si, et seulement si, q est non-dégénérée.*

Démonstration. Soit $\widetilde{b} : x \in E \mapsto b(x, \cdot) \in E^*$ avec $E = \overrightarrow{\mathbb{E}}$. Alors x_0 est un centre de $[f]$ si, et seulement si, $\widetilde{b}(x_0) = \frac{\lambda}{2}$. Donc x_0 est unique $\iff \widetilde{b}$ injective $\iff \ker q = 0$. □

On distingue alors 3 familles de quadriques affines non-triviales sur $\mathbb{A}$:

les cônes : ce sont les quadriques dont l'image contient l'unique centre (de symétrie). Leur classification se ramène à la classification des formes quadratiques de dimension $\dim(\mathbb{A})$ à similitude près.

Elles se ramènent à une équation du type

$$q = 0$$

les quadriques à centre pur : ce sont les quadriques dont l'image possède au moins un centre de symétrie mais ne le contiennent pas, par exemple les sphères, les cylindres, ...

Elles se ramènent à une équation du type

$$q = 1$$

les quadriques paraboliques : ce sont les quadriques qui n'ont pas de centre.

Elles se ramènent à une équation du type

$$X_n = q'(X_1, \ldots, X_{n-1})$$

Leur classification se ramène à la classification de q' à similitude près.

Exemple 4.18. Si $n = 3$, il y a 5 quadriques propres à transformation affine près :

$q \sim (+ + +) = 1$ **:** ellipsoïde ;

$q \sim (+ + -) = 1$ **:** hyperboloïde à une nappe ;

$q \sim (+ - -) = 1$ **:** hyperboloïde à deux nappes ;

$z = q'$ **avec** $q' \sim (++)$ **:** paraboloïde elliptique ;

$z = q'$ **avec** $q' \sim (++)$ **:** paraboloïde hyperbolique.

Exercice 3. Justifier ce résultat et dessiner les images des quadriques correspondantes. Justifier la nomenclature.

On notera que les quadriques affines propres ne sont pas des cônes. Il y a également des quadriques affines dégénérées (cône à base elliptique, cylindre elliptique, cylindre hyperbolique, cylindre parabolique).

4.4 Coniques euclidiennes

Soit $\mathbb{E}$ le plan euclidien de dimension 2 qui est en particulier affine. Classifier les coniques euclidiennes, c'est faire agir $\mathrm{Isom}(\mathbb{E})$ sur l'espace des coniques et étudier les orbites de cette action. On va voir que la classification euclidienne revient à appliquer un procédé d'orthogonalisation simultané.

Soit $\mathcal{C} = \{(x, y),\ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\}$ une conique propre de $\mathbb{E}$. On rappelle que suivant le discriminant de $q = ax^2 + bxy + cy^2$, la conique est soit une ellipse ($\mathrm{disc}(q) > 0$), soit une parabole ($\mathrm{disc}(q) = 0$), soit une hyperbole ($\mathrm{disc}(q) < 0$).

Sur $\mathbb{E}$, on dispose alors de deux formes quadratiques : d'une part q et d'autre par la forme quadratique induite par le produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Théorème 4.19. *(1) Si $\mathcal{C}$ est une conique propre à centre de $\mathbb{E}$, alors il existe deux réels strictement positifs $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et un repère orthonormé de $\mathbb{E}$ dans lequel $\mathcal{C}$ s'écrit :*

- $\mathcal{C} = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$ *si $\mathcal{C}$ est une ellipse affine ;*
- $\mathcal{C} = \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$ *si $\mathcal{C}$ est une hyperbole affine.*

Les réels a, b sont appelés demi-axes de $\mathcal{C}$.

(2) Si $\mathcal{C}$ est une conique propre sans centre, c'est une parabole et il existe un réel $p \in \mathbb{R}_+^*$ et un repère orthonormé dans lequel $\mathcal{C}$ s'écrit :

- $\mathcal{C} = \left(y^2 = 2px\right)$.

Le réel p est appelé le paramètre de la parabole $\mathcal{C}$ et on dit par convention que son sommet est son centre.

Démonstration. Par orthogonalisation simultanée dans $\overrightarrow{\mathbb{E}}$, il existe une base $\langle \cdot, \cdot \rangle$-orthonormée et q-orthogonale. On en déduit l'existence de ces équations par translation de la base ainsi obtenue en un repère orthonormé. □

Définition 4.20. Ces équations de $\mathcal{C}$ sont dites réduites.

Si $\mathcal{C}$ est une ellipse et $a = b$, on dit que $\mathcal{C}$ est un cercle de rayon a.

Si $\mathcal{C}$ est une hyperbole et $a = b$, on dit que $\mathcal{C}$ est une hyperbole équilatère.

4.4.1 Description monofocale des coniques

Proposition 4.21. *Toute conique propre qui n'est pas un cercle est le lieu des points M tels que*

$$MF = ed(M, D)$$

où

- *F est un point appelé* foyer *;*
- *D est une droite appelée* directrice *;*
- *$e \in \mathbb{R}_+^*$ est un nombre appelé excentricité.*

Par ailleurs, on a

- *si $e \in]0, 1[$, alors $\mathcal{C}$ est une ellipse ;*
- *si $e = 1$, alors $\mathcal{C}$ est une parabole ;*
- *si $e \in]1, +\infty[$, alors $\mathcal{C}$ est une hyperbole.*

4.4.2 Description bifocale des coniques

Définition 4.22. Une ellipse de foyers F et F' est l'ensemble des points M tels que $d(M, F)+d(M, F') = 2a$ où $2a > d(F, F')$.

Une hyperbole de foyers F et F' est l'ensemble des points M tels que $|d(M, F) - d(M, F')| = 2a$ où $2a < d(F, F')$.

Proposition 4.23 (Propriété angulaire)**.**

La tangente à l'ellipse en M est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$.

La tangente à l'hyperbole en M est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$.

Démonstration. Supposons que $\mathcal{C}$ est une ellipse. Soit $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(M) = d(M, F) + d(M, F')$. Alors φ est différentiable en tout point $M \in \mathcal{C} \setminus \{F, F'\}$ et l'ellipse est un niveau régulier de φ. Donc l'espace tangent à $\mathcal{C}$ en M est $T_M\mathcal{C} = \ker d\varphi(M)$. On est donc ramené à un problème de minimisation sous contrainte. Soit D une droite passant par M telle que M est le minimum de φ sur D. On a alors $D = T_M D \subset \ker d\varphi(M)$. Par dimension $D = \ker d\varphi(M) = T_M\mathcal{C}$.

On procède de manière analogue pour une hyperbole. □