Exponentielle de matrices et applications

Leçons directement concernées (2019)

(156) Exponentielle de matrices. Applications.

(221) Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Leçons dans lesquelles il est naturel mais pas obligatoire de parler des propriétés de l'exponentielle de matrices

(106) Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

(153) Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

(155*) Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

(157) Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

(215*) Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Leçons dans lesquelles on peut évoquer l'exponentielle de matrice comme exemple ou application de la notion

(158*) Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

(204*) Connexité. Exemples et applications.

(205*) Espaces complets. Exemples et applications.

(208) Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

(214) Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

(239) Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Table des matières

L'enjeu de ce cours est de proposer à quelques semaines des écrits un cours qui recoupe plusieurs notions du programmes tant d'algèbre que de géométrie différentielle. On y rappelle les propriétés importantes de l'exponentielle de matrice et des applications, en particulier au groupe linéaire. Il ne saurait constituer d'aucune façon un plan pour la leçon éponyme.

Si peu de leçons sont directement concernées par ce cours, il pourra néanmoins proposer des méthodes dont l'utilisation est récurrente dans les sujets d'écrit de l'agrégation. La structure de ce cours est faite pour regrouper par thèmes les applications des différentes propriétés de l'exponentielle, bien que la plupart de celles-ci soient démontrables dès le début.

1 L'exponentielle de matrices

On notera que l'exponentielle est, le plus souvent, définie comme une série convergente et que par conséquent, cela nécessite une topologie satisfaisante – disons complète – du corps de base. Dans toute la suite, le corps de base $\mathbb{K}$ sera toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ comme le suggère le programme de l'agrégation. Libre à vous de réfléchir à la définition de l'exponentielle sur un corps p-adique de caractéristique zéro (i.e. extension finie de $\mathbb{Q}_p$).

1.1 Définitions et propriétés de base

L'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est munie (pour les définitions) d'une norme d'algèbre $\|\cdot\|$, c'est-à-dire une norme telle que

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

Par exemple, si $|\cdot|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, la norme subordonnée $\|A\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{S}^1_{|\cdot|}} |Ax|$, où $\mathbb{S}^1_{|\cdot|}$ désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ pour la norme $|\cdot|$, est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est automatiquement complet pour cette norme (car de dimension finie). On identifiera $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la variété $\mathbb{R}^{n^2}$ pour le point de vue de la géométrie différentielle.

Définition 1.1 (Exponentielle)**.**
Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, définissons la série en A

$$\exp A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Elle converge normalement sur tout compact, et définit donc une fonction continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, appelée *exponentielle de matrices.*

Démonstration. Comme on a choisi une norme d'algèbre, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left\|\frac{A^k}{k!}\right\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$$

qui est le terme général de la série convergente $\exp(\|A\|)$. On a donc bien la convergence normale sur tout compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et le reste en découle (en particulier, $\|\exp A\| \leq \exp(\|A\|)$). ☐

Voici quelques propriétés de base de l'exponentielle pour se faire une première idée.

Proposition 1.2.
(*a*) *Pour toute matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*,* $\exp({}^tA) = {}^t\exp A$*.*
(*b*) *Pour toute matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*,* $\exp A = P_A(A)$ *pour un certain polynôme* $P_A \in \mathbb{K}[X]$ *(qui dépend de A !).*
(*c*) *Si* $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ *est diagonale, alors* $e^D = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n})$ *aussi.*
(*d*) *Si N est nilpotente, alors* $e^N = \sum_{k=0}^n \frac{N^k}{k!}$*.*

Démonstration. Notons, pour tout $M \in \mathbb{N}$, $P_M(A) = \sum_{k=0}^M A^k/k!$. Par définition de la série, on a toujours

$$\exp A = \lim_{M\to+\infty} P_M(A),$$

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P({}^tA) = {}^tP(A)$ d'où le (a). Plus grossièrement, l'ensemble des polynômes en A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, en particulier fermé, ce qui prouve le (b).

Les formules (c) et (d) découlent des expressions explicites des $P_M(A)$ lorsque A est diagonale ou nilpotente (pour ce dernier cas, $A^k = 0$ si $k > n$ d'où le résultat). $\square$

On s'attend bien sûr à généraliser des propriétés de l'exponentielle ordinaire à celle des matrices, ce qui n'est pas aussi immédiat qu'il y paraît.

Exemple 1.3. Par exemple, prenons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, on calcule immédiatement (comme $A^2 = B^2 = 0$) que

$$\exp A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \exp B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mais par ailleurs, $(A+B)^2 = I_2$ donc

$$\exp(A+B) = \sum_{k\geq 0} \frac{I_2}{2k!} + \sum_{k\geq 0} \frac{A+B}{(2k+1)!} = \cosh(1) I_2 + \sinh(1)(A+B) \neq \exp A \cdot \exp B.$$

Le vrai résultat est la propriété suivante.

Proposition 1.4.
Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent, alors $\exp(A+B) = \exp A \cdot \exp B$.

Remarque 1.5. On retrouve dans ce cas qu'en particulier $\exp A$ et $\exp B$ commutent, ce qui était prouvable avant car $\exp B$ est un polynôme en B qui commute avec A, donc commute avec tout polynôme de A donc avec $\exp A$.

Démonstration. Comme on a affaire à deux séries normalement convergentes, on peut réécrire par le théorème de Fubini

$$\exp A \cdot \exp B = \sum_{k,\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{k!\ell!} A^k B^\ell = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{A^k B^{m-k}}{k!(m-k)!} \right).$$

Or, par la formule du binôme de Newton, comme A et B commutent, le terme général en m à droite n'est autre que $\frac{(A+B)^m}{m!}$ et on conclut immédiatement. $\square$

Voici deux premières applications fondamentales de ce résultat

Corollaire 1.6. *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice $\exp A$ est inversible et*

$$\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$$

En particulier, l'exponentielle est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser la formule avec A et $-A$. $\square$

Corollaire 1.7. *Si on considère la fonction $g_A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie pour A fixé par $g_A(t) = \exp(tA)$, cette fonction est $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$g_A'(t) = Ag(t) = g(t)A.$$

Démonstration. Il s'agit, pour utiliser la formule précédente, de remarquer que tA et $t'A$ commutent pour tous $t, t' \in \mathbb{R}$. On a donc, pour $h \in \mathbb{R}$ tendant vers 0,

$$g_A(t+h) = g_A(t) g_A(h) = g_A(t)(1 + hA + o(h^2))$$

car $g_A(h)$ est une série entière en A. On a donc

$$\frac{g_A(t+h) - g_A(t)}{h} = Ag_A(t) + o(h),$$

ce qui démontre que g_A est dérivable en t de dérivée $Ag_A(t)$ (ou $g_A(t)A$ car ils commutent). $\square$

Exercice 1.

(a) Montrer plus généralement que pour toute fonction dérivable $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A'(t)$ et $A(t)$ commutent, on a

$$(\exp A(t))' = A'(t) \exp A(t).$$

(b) Montrer que cette égalité n'est pas vérifiée en général, par exemple $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2 Réduction et exponentielle de matrices

La formule fondamentale nous donne également une piste pour calculer plus facilement l'exponentielle.

Proposition 1.8.

(a) *Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$,*

$$\exp(Q^{-1}AQ) = Q^{-1} \exp(A)Q.$$

(b) *Supposons que D est une matrice diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Alors, si P est un polynôme tel que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $P(\lambda_i) = \exp(\lambda_i)$ (par exemple un polynôme d'interpolation de Lagrange), on a $\exp D = P(D)$. En particulier, $\exp D$ est diagonalisable.*

(c) *Si $A = D + N$ est la décomposition de Dunford de A, la décomposition de Dunford de $\exp A$ est*

$$\exp A = \exp D + \exp D \cdot (\exp N - I)(= \exp D \cdot \exp N)$$

(d) *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a*

$$\det(\exp A) = \exp(\mathrm{Tr}\, A).$$

Remarque 1.9. L'intérêt du (b) est qu'on peut calculer l'exponentielle dès qu'on connaît les valeurs propres de D, sans avoir recours à la diagonalisation de D elle-même.

Démonstration. (a) On réutilise les polynômes $P_M(A)$ plus haut. Alors,

$$\begin{aligned} \exp(Q^{-1}AQ) &= \lim_{M \to +\infty} P_M(Q^{-1}AQ) \\ &= \lim_{M \to +\infty} Q^{-1}P_M(A)Q \\ &= Q^{-1}(\lim_{M \to +\infty} P_M(A))Q \\ &= Q^{-1} \exp(A)Q \end{aligned}$$

par continuité de la conjugaison par Q dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(b) Reprenons les notations de l'énoncé. Il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$D = Q^{-1} \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)Q.$$

Alors, d'après le (a),

$$\exp D = Q^{-1} \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n})Q,$$

mais d'un autre côté, par construction de P,

$$\operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}) = P(\operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)).$$

On fait la substitution, et utilise encore la conjugaison par Q, pour obtenir

$$\exp D = P(D).$$

(c) Comme D et N commutent, $\exp D$ et $\exp N$ commutent également comme remarqué précédemment, et $\exp A = \exp D \exp N$. Ensuite, $\exp D$ est diagonalisable comme on vient de le montrer, et $\exp N - I$ est nilpotente car une somme de matrices nilpotentes qui commutent, donc $\exp D(\exp N - 1)$ est bien nilpotente encore une fois car les deux facteurs commutent. On a donc bien la décomposition de Dunford de $\exp A$, par unicité.

(d) Si T est une matrice triangulaire supérieure, ses itérées le sont également, et on voit directement que les coefficients diagonaux de $\exp T$ sont donc l'image par l'exponentielle de ceux de T. Ceci entraîne la formule pour les matrices triangulaires supérieures, et on la déduit dans le cas général par trigonalisation sur $\mathbb{C}$ et par le (a) (ou alternativement Dunford). □

Ces résultats de réduction permettent de connaître un peu mieux le comportement de l'exponentielle, notamment son injectivité.

Proposition 1.10.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ trigonalisable sur $\mathbb{K}$ (automatique si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Alors :
(a) A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $\exp A$ l'est.
(b) $\exp A = I$ si et seulement si A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et le spectre de A est inclus dans $2i\pi\mathbb{Z}$.
(c) Si A, B sont réelles et diagonalisables sur $\mathbb{R}$, alors $\exp A = \exp B$ si et seulement si $A = B$.

Démonstration.
(a) L'implication directe est le (b) de la proposition précédente. Réciproquement, supposons A trigonalisable et $\exp A$ diagonalisable. On a la décomposition de Dunford $A = D + N$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et il faut donc montrer que $N = 0$. Par le (c) précédemment, et l'unicité de la décomposition de Dunford de $\exp A$, on sait que

$$\exp D \cdot (\exp N - I) = 0,$$

donc $\exp N = I$ par inversibilité des exponentielles. Or,

$$\exp N - I = N \cdot \left(I + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{(k+1)!} \right) = N \cdot (I - N')$$

où N' est encore nilpotente en tant que somme de matrices nilpotentes qui commutent. Cela impose que $I + N'$ est inversible : en effet, on a

$$(I - N')(\sum_{k=0}^{n} (N')^k) = \sum_{k=0}^{n} (N')^k - \sum_{k=1}^{n+1} (N')^k = I - (N')^{n+1} = I$$

par hypothèse. Comme $\exp N = I$, on a donc nécessairement $N = 0$ ce qui prouve que A était bien diagonalisable.

(b) Par le (a), $\exp A = I$ si et seulement si A est diagonalisable et $\exp A = I$, et on utilise l'expression pour l'exponentielle d'une matrice diagonalisable, sachant que le noyau de l'exponentielle habituelle est $2i\pi\mathbb{Z}$.

(c) Un sens est évident, supposons réciproquement que $\exp A = \exp B$. Par le (a), on en déduit que A et B sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$. Alors, A est un polynôme en $\exp A$ et de même pour B. En effet, l'exponentielle étant injective sur $\mathbb{R}$, on peut trouver un polynôme P_A qui envoie e^λ sur λ pour toute valeur propre de A. On a alors $A = P_A(\exp A)$ par des arguments similaires à la Proposition 1.8. Maintenant, l'égalité $\exp A = \exp B$ impose que A et B soient tous les deux dans l'algèbre engendrée par cette matrice, en particulier elles commutent et $A - B$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. On a alors

$$\exp(A - B) = \exp(A) \exp(B)^{-1} = I.$$

Comme $A - B$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, son exponentielle également, et ses valeurs propres sont les images par l'exponentielle de celles de $A - B$, mais l'identité a pour seule valeur propre 1. Les valeurs propres de $A - B$ sont donc toutes 0, ce qui impose $A = B$. □

Exercice 2.
Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'exponentielle de $\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$. En déduire des matrices réelles dont l'exponentielle est l'identité.

Exercice 3.
(a) Pour toute matrice A telle que $\|A - I\| < 1$, on définit le logarithme de A par

$$\log(A) = \sum_{k \geq 1} ((-1)^{k-1} \frac{(A - I)^k}{k}.$$

Montrer que cette série converge uniformément sur tout compact du domaine $\|A - I\| < 1$, en déduire qu'elle définit une fonction continue sur ce domaine.

(b) Montrer que l'exponentielle et le logarithme sont inverses l'un de l'autre lorsqu'ils sont tous les deux définis.

1.3 Image de l'exponentielle

Le but de cette section est de calculer l'image de l'exponentielle, totale ou restreinte à divers sous-espaces.

Proposition 1.11. *L'exponentielle est surjective de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.*

Démonstration. Bien que ce soit contre-intuitif, on va en fait montrer un résultat plus fort : pour toute matrice $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$B = \exp(P(B)).$$

Pour ceci, écrivons la décomposition de Dunford $B = D + N$ de B. Comme B est inversible, D également (cf. construction de la décomposition de Dunford) et on peut écrire $B = D(I + D^{-1}N)$. Comme D et N commutent, il suffit donc de montrer que D est une exponentielle d'un polynôme en D (car c'est un polynôme en B) et $I + D^{-1}N$ également. Pour la partie D, on réutilise les outils de la proposition précédente. Pour l'autre partie, on utilise le logarithme de $I + D^{-1}N$, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{(D^{-1}N)^k}{k}.$$

Par un calcul formel (fini), on montre directement que l'exponentielle de cette matrice n'est autre que $I + D^{-1}N$, et c'est gagné. $\square$

Corollaire 1.12. *Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.*

Démonstration. Prenons une matrice $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Par le résultat précédent, il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\exp A = B$, et on a alors le chemin $t \mapsto \exp(tA)$ qui en 0 vaut I et en 1 vaut B, continu, à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, ce qui prouve la connexité par arcs. $\square$

Corollaire 1.13. *Pour toute matrice $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et toute puissance $p \in \mathbb{N}$, il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^p = B$.*

Démonstration. Il suffit de prendre A_0 telle que $\exp A_0 = B$ et ensuite $A = \exp\left(\frac{A_0}{p}\right)$. $\square$

Proposition 1.14. *L'image de l'exponentielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est exactement l'ensemble des M^2 où $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Si $B = \exp A$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $B = \exp\left(\frac{A}{2}\right)^2$ par la formule, et donc c'est bien un carré de matrice réelle. Réciproquement, supposons que $B = M^2$ avec $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors, par la preuve de la surjectivité ci-dessus, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $M = \exp(P(M))$. On a finalement

$$B = \exp(P(M))^2 = \exp(P(M))\exp(\overline{P}(M)) = \exp((P + \overline{P})(M))$$

et le polynôme $P + \overline{P}$ est réel, donc on a bien une exponentielle de matrice réelle. $\square$

Exercice 4.
Montrer que l'exponentielle est un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Prouver l'analogue dans le cas complexe.

1.4 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

En toute généralité une équation différentielle est $y' = f(t, y)$. On n'en dira pas grand chose mais vous savez, ou saurez bientôt dans d'autres cours, qu'il existe une situation particulière d'équations différentielles dites linéaires de la forme $y' = A(t)y + b(t)$ où les applications $t \mapsto A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $t \mapsto b(t) \in \mathbb{R}^n$ sont continues. Ces équations ont la propriété remarquable d'être défini sur tout un intervalle de définition en application d'un théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire ou d'un Lemme de Grönwall par exemple.

Supposons qu'on est dans le cas, encore plus particulier d'une équation $y' = Ay$ avec $t \mapsto A(t) := A$ constante, c'est-à-dire une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants. Il est alors élémentaire de résoudre cette équation différentielle de donnée initiale $y(0) = y_0$ en $y(t) = \exp(tA)y_0$.
Exercice 5. Généraliser pour une EDL à coefficients constants de la forme $y' = Ay + b$.

L'intérêt d'étudier ce cas très particulier découle d'un théorème de linéarisation qui sort du cadre de ce cours.

Supposons désormais que $n = 2$. On a vu que le calcul de $\exp(tA)$ est simplifié par des méthodes de réductions. Quels sont donc les cas possibles ?

On se demande par exemple si A est diagonalisable. On sait que $\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)$. Posons $\Delta_A = \mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A)$. Si $\Delta_A < 0$, alors A admet deux valeurs propres complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ et n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$. Pour résoudre l'équation différentielle, il est alors plus aisé de se placer en coordonnées polaires, pour lesquelles on trouve $r' = \alpha r$ et $\theta' = \beta$.

Si $\Delta > 0$, on trouve deux valeurs propres réelles distinctes, donc la matrice A est diagonalisable de valeurs propres $\lambda \neq \mu$. Donc $\exp(tA)$ est semblable à $\begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\mu} \end{pmatrix}$.

Si $\Delta = 0$, alors A est trigonalisable, et admet une unique valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$. Elle est donc semblable à l'une des deux matrices λI_2 ou $\lambda I_2 + C$ avec $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\exp(tC) = I_2 + tC$. Ainsi $\exp(tA) = e^{t\lambda}(I_2 + tC)$ car λI_2 et C commutent. Il est ainsi facile d'étudier les solutions.

Traçons les diagrammes de phase correspondant à cette étude, lorsque $\det(A) \neq 0$:

	stable	instable
$\Delta_A > 0$ $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ $\lambda \neq \mu$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$ $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda, \mu\}$		
$\Delta_A = 0$ $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\lambda \in \mathbb{R}^*$ $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda\}$		
$\Delta_A = 0$ $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\lambda \in \mathbb{R}^*$ $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda\}$		
$\Delta_A = 0$ $A \sim \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ $\alpha \in \mathbb{R}^*,\ \beta \in \mathbb{R}$ $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\alpha \pm i\beta\}$		

2 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Une application différentiable c'est une application qui ressemble localement à une application linéaire. Ceci est remarquablement illustré par le théorème d'inversion locale. De plus, le théorème des fonctions implicites va nous permettre de construire des parties de $\mathbb{R}^n$ qui ressemblent localement à des sous-espaces vectoriels. On parlera alors de sous-variétés de $\mathbb{R}^n$.

Dans toute la suite, on supposera $m, n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{1, 2, \ldots, \infty\}$.

2.1 Inversion locale et fonctions implicites

Théorème 2.1 (Inversion locale)**.** *Soit E et F des espaces de Banach (typiquement $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$). Soit U un ouvert non vide de E et $f : U \to F$ une application de classe $\mathcal{C}^k$. S'il existe $x_0 \in U$ tel que $Df(x_0) \in \mathcal{L}_c(E, F)$ est inversible, alors il existe un ouvert U' de E contenant x_0 tel que la restriction $f_{|U'} : U' \to f(U')$ de f à U' est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.*

Démonstration. On veut trouver localement un inverse à f, c'est-à-dire résoudre $y = f(x)$ sur des voisinage $y \in B(f(x_0), r')$ et $x \in BF(x_0, r)$. On pose $g_y(x) = x - Df(x_0)^{-1}(f(x) - y)$ de sorte que $y = f(x) \Leftrightarrow g_y(x) = x$.

On se réduit ainsi à un problème de point fixe. On a $Dg_y(x) = \mathrm{Id} - Df(x_0)^{-1} \circ Df(x)$. Comme f est supposée au moins de classe $\mathcal{C}^1$, sa différentielle Df est continue en x_0 donc il existe $r > 0$ tel que $BF(x_0, r) \subset U$ et pour $x \in BF(x_0, r)$, on ait $\|Dg_y(x)\| \leq \frac{1}{2}$.

Par le théorème des accroissements finis, on a pour $s > 0$ assez petit et $y \in B(f(x_0), s)$:

$$\begin{aligned} \|g_y(x) - x_0\| &< \|g_y(x_0) - x_0\| + \tfrac{1}{2}\|x - x_0\| \\ &< \|Df(x_0)^{-1}(f(x_0) - y)\| + \tfrac{1}{2}r \\ &< s\|Df(x_0)^{-1}\| + \tfrac{r}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, pour $0 < s < \frac{r}{2\|Df(x_0)^{-1}\|}$ et $y \in B(f(x_0), s)$, on a $g_y(BF(x_0, r)) \subset BF(x_0, r)$. Donc g_y est $\frac{1}{2}$-contractante sur $BF(x_0, r)$. Ce qui nous donne l'existence, pour $y \in B(f(x_0), s)$ d'un unique $x \in B(x_0, r)$ tel que $g_y(x) = x$, autrement dit $f(x) = y$.

On a donc une bijection $f : U' \to V'$ pour $U' = B(x_0, r) \cap f^{-1}(B(f(x_0), s))$ et $V' = B(f(x_0), s)$. Montrons que $f^{-1} : V' \to U'$ est différentiable et calculons sa différentielle. Soit $y \in V'$ et $y + k \in V'$. Posons $x = f^{-1}(y)$ et $h = f^{-1}(y + k) - f^{-1}(y)$. Alors :

$$h = g_{y+k}(x + h) - g_y(x) = \Big[g_{y+k}(x + h) - g_{y+k}(x)\Big] + \Big[g_{y+k}(x) - g_y(x)\Big]$$

Par le théorème des accroissements finis, on a $\Big\|\Big[g_{y+k}(x + h) - g_{y+k}(x)\Big]\Big\| < \frac{\|h\|}{2}$. De plus $\Big[g_{y+k}(x) - g_y(x)\Big] = Df(x_0)^{-1}(k)$. Ainsi $\frac{\|h\|}{2} < \Big\|h - \Big[g_{y+k}(x + h) - g_{y+k}(x)\Big]\Big\| \leq \|Df(x_0)^{-1}\|\|k\|$. En particulier $\|h\| = O(\|k\|)$.

Comme f est différentiable en x, on a :

$$k = f(x + h) - f(x) = Df(x)(h) + o(\|h\|) = Df(x)(h) + o(\|k\|)$$

Ainsi $f^{-1}(y + k) - f^{-1}(y) = h = Df(f^{-1}(y))^{-1}(k) + o(\|k\|)$.

Ceci montre que f^{-1} est différentiable en y et en particulier continue, et que sa différentielle est $D(f^{-1})(y) = Df(f^{-1}(y))^{-1}$. En particulier, on obtient par une récurrence immédiate que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$. □

Voici par exemple deux lemmes calculatoires parfois utiles sur l'exponentielle de matrices.

Exercice 6. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer qu'alors

(1) $$\lim_{N\to\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{N}\right)\exp\left(\frac{B}{N}\right)\right)^N = \exp(A + B)\,;$$

(2) $$\lim_{N\to\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{N}\right)\exp\left(\frac{B}{N}\right)\exp\left(-\frac{A}{N}\right)\exp\left(-\frac{B}{N}\right)\right)^{N^2} = \exp([A, B]).$$

Démonstration. Pour le (1), on écrit $\exp\left(\frac{A}{N}\right) = I_n + \frac{A}{N} + O(\frac{1}{N^2})$ et $\exp\left(\frac{B}{N}\right) = I_n + \frac{B}{N} + O(\frac{1}{N^2})$. Alors $\exp\left(\frac{A}{N}\right)\exp\left(\frac{B}{N}\right) = I_n + \frac{A+B}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$. Donc $\exp\left(\frac{A}{N}\right)\exp\left(\frac{B}{N}\right)$ reste dans une boule de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ centrée 1 contenue dans l'image W d'un difféomorphisme local de exp : $V \to W$. Notons log : $W \to V$ son inverse. Alors $N \log\left(\exp\left(\frac{A}{N}\right)\exp\left(\frac{B}{N}\right)\right) = A + B + O\left(\frac{1}{N}\right)$. Donc finalement $\left(\exp\left(\frac{A}{N}\right)\exp\left(\frac{B}{N}\right)\right)^N \to_{N\to\infty} \exp(A+B)$.

Le (2), analogue, demande d'étudier un DL à l'ordre 3 et est laissé en exercice au lecteur. $\square$

Théorème 2.2 (Théorème des fonctions implicites 1)**.** *Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. On suppose $m \leq n$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application de classe $\mathcal{C}^k$. On suppose que $x_0 \in U$ est tel que $Df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est surjective.*

Alors il existe

- *un ouvert $U' \subset U$ contenant x_0,*
- *un ouvert V de $\mathbb{R}^n$*
- *et un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\Phi : U' \to V$*

tels que $f \circ \Phi^{-1} : V \to \mathbb{R}^m$ est la restriction à V de la projection canonique $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Autrement dit, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[d, "\Phi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ V \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

On peut le reformuler de la manière suivante :

Théorème 2.3 (Théorème des fonctions implicites 2)**.** *On suppose $m \leq n$. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application de classe $\mathcal{C}^k$. On suppose que $(x_0, y_0) \in U$ est tel que $D_2 f(x_0, y_0) : h \mapsto Df(x_0, y_0)(0, h) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ est inversible et que $f(x_0, y_0) = 0$.*

Alors, au voisinage de (x_0, y_0), l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ tels que $f(x, y)$ est le graphe d'une application g de classe $\mathcal{C}^k$.

Autrement dit, il existe

- *un ouvert $U' \subset U$ contenant (x_0, y_0),*
- *un voisinage ouvert $V \subset \mathbb{R}^m$ de x_0*
- *et une application $g : V \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathbb{C}^k$*

tels que :

$$(x, y) \in U \text{ et } f(x, y) = 0 \iff x \in V \text{ et } y = g(x)$$

Démonstration. On pose $F(x_1, \ldots, x_n) = \Big((x_1, \ldots, x_{n-m}), f(x_1, \ldots, x_n)\Big)$. Alors $DF(x_0, y_0)$ est inversible. Par le théorème d'inversion locale, il existe un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme Φ entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ tel que $F \circ \Phi^{-1} = \pi$. Donc « résoudre $f(x, y) = 0$ c'est facile ». $\square$

2.2 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Le théorème des fonctions implicites permet de « construire » des parties de $\mathbb{R}^n$ qui ressemble localement à un sous-espace vectoriel. On va s'intéresser aux parties M de $\mathbb{R}^n$ qui ont cette propriété locale en tout point.

Proposition 2.4. *Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ et $d \leq n$ un entier. S'équivalent :*

(i) ***(Redressement local)*** *pour tout $x_0 \in M$, il existe un voisinage ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0, un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ et un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\Phi : U \to V$ tel que $\Phi(U \cap M) = V \cap \left(\mathbb{R}^d \times \{0\}\right)$;*

(ii) ***(Équation locale)*** *pour tout $x_0 \in M$, il existe un voisinage ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 et une application $f : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ telle que $Df(x_0)$ est surjective et $U \cap M = f^{-1}(\{0\})$;*

(iii) ***(Graphe local)*** *pour tout point $x_0 \in M$, il existe un voisinage ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0, un isomorphisme $u \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$, un ouvert $V \subset \mathbb{R}^d$ et une application $g : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $u(U \cap M) = \{(x, g(x))\ ,\ x \in V\}$;*

(iv) ***(Image d'un plongement)*** *pour tout $x_0 \in M$, il existe un voisinage ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0, un ouvert $V \subset \mathbb{R}^d$ et un plongement $h : V \to \mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire que V et $h(V)$ sont homéomorphes) qui est une immersion (c'est-à-dire que $\forall x \in V\ Dh(x)$ est injective) tels que $h(V) = M \cap U$.*

Exercice 7. Le démontrer.

Définition 2.5. Si $M \subset \mathbb{R}^n$ satisfait les conditions équivalentes de la proposition 2.4, alors on dit que M est une **sous-variété** de $\mathbb{R}^n$ de dimension d et de classe $\mathbb{C}^k$.

Exemple 2.6 (Le cercle unité est une sous-variété du plan de dimension 1).

(i) $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ x^2 + y^2 = 1\}$. On prend $\Phi(x, y) = (x, x^2 + y^2 - 1)$ ou $\Psi(x, y) = (y, x^2 + y^2 - 1)$.

(ii) $\mathbb{S}^1 = f^{-1}(\{0\})$ pour $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ définie sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. En effet, pour tout $(x, y) \in U$, la différentielle $Df(x, y) = 2xdx + 2ydy$ est surjective.

(iii) Pour $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on a $\mathbb{S}^1 \cap U = \{(x, \sqrt{1 - x^2})\}$.

(iv) $\mathbb{S}^1 = \{(\cos t, \sin t)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$ et $h(t) = (\cos t, \sin t) :]t_0, t_0 + 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ est un plongement, une immersion et un homéomorphisme.

Comme une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ ressemble localement à un sous-espace vectoriel, on peut localement l'approximer par un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On l'appelle espace tangent.

Proposition-définition 2.7. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$ de dimension d. Soit $x_0 \in M$. En utilisant les mêmes notations que la proposition 2.4, les espaces vectoriels suivants sont isomorphes et s'identifient canoniquement deux à deux :

(i) $\left\{\gamma'(0)\ ,\ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon \to M \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ tel que } \gamma(0) = x_0\right\}$;

(ii) $\ker(Df(x_0))$ où $U \cap M = f^{-1}(\{0\})$;

(iii) $\left\{(y, Dg(x_0)(y))\ ,\ y \in \mathbb{R}^d\right\}$;

(iv) $\operatorname{Im}(Dh(h^{-1}(\{x_0\}))$

On l'appelle **espace tangent** de M en $x_0 \in M$ et on le note $T_{x_0}M$.

Exercice 8. Écrire les isomorphismes.

On doit également définir des applications différentiables entre sous-variétés. Remarquons que le paramétrage local d'une sous-variété est défini localement à difféomorphisme près.

Fait 2.8. *Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d de classe $\mathbb{C}^k$ et $x \in M$. Soit $U, U' \subset \mathbb{R}^d$ des ouverts contenant x et $\psi : U \to M, \psi' : U' \to M$ des paramétrages locaux. Alors, il existe des ouverts $V \subset U$ et $V' \subset U'$ et un $\mathbb{C}^k$-difféomorphisme $\phi : V \to V'$ tel que $\psi|_V = \psi' \circ \phi$.*

Définition 2.9. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d de classe $\mathbb{C}^k$ et $x \in M$. Soit $U \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert contenant x et $\psi : U \to M$ un paramétrage local. Soit F un espace vectoriel normé et $f : M \to F$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ en x si $f \circ \psi$ est de classe $\mathcal{C}^k$ en x. On note alors $Df(x) = D(f \circ \psi)(\psi^{-1}(x)) \circ D\psi(\psi^{-1}(x))^{-1}$.

Proposition 2.10. *Si $f : M \to M'$ est une application de classe $\mathcal{C}^k$ en $x \in M$, entre sous-variétés, alors la différentielle en x définit une application $Df(x) : T_xM \to T_{f(x)}M'$.*

Dans ce contexte, on est naturellement amené à introduire la définition suivante en théorie des groupes.

Définition 2.11. Un groupe de Lie réel *de dimension finie* d est une sous-variété G de dimension d tel que les applications suivantes sont différentiables :

$$\begin{array}{rccc} \mu : & G \times G & \to & G \\ & (g, h) & \mapsto & gh \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rccc} \iota : & G & \to & G \\ & g & \mapsto & g^{-1} \end{array}$$

Dans ce cours, afin d'éviter d'avoir à se poser des questions de différentiabilité des applications sur une variété générale, on supposera toujours que les groupes considérés sont des sous-groupes de $\mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$.

3 Groupes linéaires

On va s'intéresser à certains groupes de matrices à coefficients réels ou complexes dit classiques. Le choix du corps de base n'est pas anodin et munit le groupe d'une structure naturelle d'espace topologique (localement compact), et même de sous-variété de $\mathbb{R}^N$. On parlera alors de groupes de Lie réels

D'une part, les groupes classiques fournissent de nombreux exemples de groupes de Lie réels. D'autre part, les aspects topologiques ou différentiables peuvent aider à obtenir des résultats algébriques comme on va le voir sur quelques exemples.

Définition 3.1. Un groupe G est dit *linéaire* s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un corps K tel que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$.

3.1 Groupe linéaire général et groupe spécial linéaire

Fait 3.2. *Le groupe linéaire* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *est un groupe de Lie de dimension* n^2.

Démonstration. L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car polynomiale et $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^\times)$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$. En particulier, c'est une sous-variété de dimension n^2 et l'espace tangent en tout $g \in G$ est $T_g\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, la multiplication $\mu : G \times G \to G$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par restriction de la multiplication matricielle à l'ouvert G. Enfin, l'application $\iota : G \to G$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car, pour $A \in G$, les coefficients de A^{-1} sont des fractions rationnelles en les coefficients de A via la formule $A^t\mathrm{Com}(A) = \det(A)I$. □

Proposition 3.3. *Le groupe* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ *est connexe par arcs. Le groupe* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *admet deux composantes connexes (par arcs) qui sont* $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ *et* $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$.

Démonstration. On sait que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est engendré par les matrices de transvection. Or toute transvection est reliée par un arc à I via $t \mapsto T_{ij}((1-t)\lambda)$.

Soit $A \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mu = \det(A)$. Alors $D_i(\mu)A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est relié par un arc dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ à I_n. De plus, l'arc $D_i((1-t)\mu + t)$ relie $D_i(\mu)$ à I_n dans $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$. Donc $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est un ouvert fermé connexe par arcs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$: c'est une composante connexe.

De même pour $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ qui est le complémentaire de $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. □

Soit G un groupe de Lie réel linéaire d'élément neutre noté e et $\mathfrak{g} = T_eG = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace tangent en l'élément neutre. Pour $g \in G$, posons $c_g : G \to G \quad , \quad h \mapsto ghg^{-1}$. Alors c_g est $\mathcal{C}^\infty$ et on peut définir une application :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Ad} : & G & \to & \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \\ & g & \mapsto & Dc_g(e) \end{array}$$

Par composition des différentielles, on a :

$$Dc_{gh}(e) = D(c_g \circ c_h)(e) = Dc_g(\underbrace{h(e)}_{=e}) \circ Dc_h(e)$$

Définition 3.4. En particulier, Ad est un morphisme de groupes $G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ et on l'appelle **représentation adjointe** de G.

On note $\mathrm{ad} = D\,\mathrm{Ad}(e)$ sa différentielle en l'élément neutre

On définit alors le crochet de Lie $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ par $[X, Y] = \mathrm{ad}(X)(Y)$.

Lemme 3.5. *On prend* $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. *Pour tout* $g \in G$*, tout* $X \in \mathfrak{g}$*, on a* $\mathrm{Ad}(g)(X) = gXg^{-1}$.
2. *Pour tout* $X, Y \in \mathfrak{g} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, on a* $[X, Y] = XY - YX$ *pour la multiplication usuelle des matrices* X *et* Y.

Exercice 9. Le démontrer.

3.2 Sous-groupes à un paramètre

Lemme 3.6 (Sous-groupe à un paramètre continue de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$)**.** *Soit* $\theta : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *un morphisme de groupes continu avec* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *On dit que* θ *est un* sous-groupe à un paramètre. *Alors, il existe un unique* $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *tel que pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *on a* $\varphi(t) = \exp tX$.

Démonstration. **Première méthode :** Comme $D\exp(0) = I_n$ est inversible, l'exponentielle réalise un difféomorphisme local en 0 donc il existe un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\exp : U \to \exp(U)$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert contenant 0 tel que $\theta(I) \subset \exp(U)$. Définissons $\varphi : I \to U$ par $\exp(\varphi(t)) = \theta(t)$. On veut montrer que φ est linéaire au voisinage de 0. Soit $t_0 \in I$, disons $t_0 > 0$ tel que $[-t_0, t_0] \subset I$. On a :

$$\exp\left(2\varphi\left(\frac{t_0}{2}\right)\right) = \exp\left(\varphi\left(\frac{t_0}{2}\right)\right)^2 = \theta\left(\frac{t_0}{2}\right)^2 = \theta(t_0) = \exp\left(\varphi(t_0)\right).$$

Donc $\varphi\left(\frac{t_0}{2}\right) = \frac{1}{2}\varphi(t_0)$. Plus généralement, ceci nous donne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![-2^n, 2^n]\!]$ que $\varphi\left(\frac{k}{2^n}t_0\right) = \frac{k}{2^n}\varphi(t_0)$. Comme θ est continue, φ l'est aussi et par densité des rationnels diadiques, on en déduit que $\forall t \in [-t_0, t_0],\ \varphi(t) = tX$ avec $X = \frac{\varphi(t_0)}{t_0} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comme $[0, t_0]$ est une partie génératrice du groupe $(\mathbb{R}, +)$, on en déduit que $\theta(t) = \exp(tX)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Deuxième méthode : *(Esquisse)* Soit ψ une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est $\mathcal{C}^\infty$ à support compact définissant une approximation de l'unité, notée (ψ_n). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la convolée $\theta * \psi_n$ est $\mathcal{C}^\infty$ et est encore un sous-groupe à 1 paramètre $\mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On en déduit que $\theta * \psi_n = (t \mapsto \exp(tX_n))$ par résolution d'une EDL à coefficient constant. Ainsi, il suffit de vérifier que $X_n \to X$ convient. □

Proposition 3.7 (Exponentielle et adjointe)**.** *Pour tout* $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *on a l'égalité suivante :*

$$\exp(\mathrm{ad}(X)) = \mathrm{Ad}(\exp(X))$$

Démonstration. Soit $g : t \mapsto \mathrm{Ad}(\exp(tX))$. Alors g est un sous-groupe à un paramètre. Donc, il existe $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $g(t) = \exp(tY)$. De plus, on a :

$$\frac{d}{dt}\left(\exp(tY)\right)|_{t=0} = Y \qquad \text{et} \qquad \frac{d}{dt}\left(\mathrm{Ad}(\exp(tX))\right)|_{t=0} = D\,\mathrm{Ad}(\exp(0))(X)$$

Ainsi, on a bien $Y = \mathrm{ad}(X)$. □

Proposition 3.8 (Différentielle de l'exponentielle)**.** *Pour tout* $X, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *on a :*

$$D\exp(X)(H) = \exp(X) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\,\mathrm{ad}(X))^n}{(n+1)!}(H)$$

Exercice 10. Le démontrer. *Indication : on pourra poser* $\theta(t) = \exp(-tX)\ \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp(t(X + sH))$.

3.3 L'algèbre de Lie d'un groupe linéaire

Définition 3.9. Une **$\mathbb{R}$-algèbre de Lie** est la donnée $(V, [\cdot,\cdot])$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V et d'une application $\mathbb{R}$-bilinéaire $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$ telle que :

- **(Anticommutativité)** $[x, y] + [y, x] = 0\ \forall x, y \in V$;
- **(Identité de Jacobi)** $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0\ \forall x, y, z \in V$.

Exemple 3.10. (1) Tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni du crochet de Lie nul est une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie.

(2) Toute $\mathbb{R}$-algèbre associative A munie du crochet de Lie $[a, b] = ab - ba$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie. Le crochet est identiquement nul si, et seulement si, l'algèbre est de plus commutative.

Soit $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ un groupe de Lie réel linéaire et notons $\mathfrak{g} = T_eG$ l'espace tangent à G en l'élément neutre e. On peut naturellement définir une application $\mathbb{R}$-bilinéaire $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par restriction de l'application définie sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. L'image de ad est en fait contenue dans $\mathfrak{g}$ car G est un groupe et ad définit un crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$ via $[X, Y] = \mathrm{ad}(X)(Y)$; l'anticommutativité et l'identité de Jacobi étant naturellement vérifiées dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Plus généralement, on définit l'algèbre de Lie d'un groupe linéaire comme suit :

Définition 3.11. Soit $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ un groupe linéaire. On définit l'**algèbre de Lie** de G par :

$$\mathfrak{g} = \big\{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ,\ \exists \gamma \in \mathcal{C}^1 : I \to G,\ \gamma(0) = I_n \text{ et } \gamma'(0) = X \text{ où } I \text{ voisinage de } 0 \text{ dans } \mathbb{R}\big\}$$

Proposition 3.12. *L'ensemble $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $[X,Y] = XY - YX$ définit un crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$ qui en fait une sous-algèbre de lie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Soit $\alpha : I_\alpha \to G$ et $\beta : I_\beta \to G$ deux arcs $\mathcal{C}^1$ tels que $\alpha(0) = \beta(0) = I_n$.

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}^*$, on définit $\gamma : \frac{1}{|a|}I_\alpha \cap \frac{1}{|b|}I_\beta \to G$ par $\gamma(t) = \alpha(at)\beta(bt)$. Alors $\gamma'(0) = a\alpha'(0)+b\beta'(0)$. Donc $\mathfrak{g}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Soit $s \in I_\alpha$ et $\gamma_s : I_\beta \to G$ définie par $\gamma_s(t) = \alpha(s)\beta(t)\alpha(s)^{-1}$. Alors γ_s est un arc $\mathcal{C}^1$ tel que $\gamma_s(0) = I_n$. De plus, $\gamma_s'(0) = \alpha(s)\beta(0)\alpha(s)^{-1} \in \mathfrak{g}$. Ainsi $\gamma : I_\alpha \to \mathfrak{g}$ défini par $\gamma(s) = \gamma_s'(0)$ est un arc $\mathcal{C}^1$ et $\gamma'(0) = \alpha'(0)\beta'(0) - \beta'(0)\alpha'(0) \in \mathfrak{g}$ car $\mathfrak{g}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Donc on a bien défini un crochet de Lie. □

En fait, l'application exponentielle est intimement liée à l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie via le théorème suivant :

Théorème 3.13. *Soit $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ un groupe linéaire. Alors :*

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ,\ \forall t \in \mathbb{R}\ \exp(tX) \in G\}$$

Démonstration. Notons $\mathfrak{g}_0 = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ,\ \forall t \in \mathbb{R}\ \exp(tX) \in G\}$. Naturellement, $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$.

Cas facile : Supposons d'abord que G est *fermé* dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

On sait que exp est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme local entre un voisinage ouvert U de 0 et un voisinage ouvert V de I_n. Notons $\log : V \to U$ son inverse. Soit $Y \in \mathfrak{g}$. Alors il existe un arc $\gamma : \mathbb{R} \to G$ tel que $\gamma'(0) = Y$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\gamma\left(\frac{t}{n}\right) = I_n + \frac{t}{n}Y + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Alors, à t fixé et pour $n \to +\infty$, on a :

$$\left(\gamma\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \exp\left(n \log\gamma\left(\frac{t}{n}\right)\right) = \exp\left(tY + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Ainsi $\exp(tY) \in \overline{G} = G$ donc $Y \in \mathfrak{g}_0$.

Cas général : On va montrer que $\mathfrak{g}_0$ contient un voisinage ouvert de $0 \in \mathfrak{g}$. Soit $Y_1, \ldots, Y_d$ une base de $\mathfrak{g}$. Donnons-nous des arcs $\gamma_i : I \subset \mathbb{R} \to G$ tels que $\gamma_i'(0) = Y_i$. Notons $V_I = \left\{\sum_{i=1}^{d} t_iY_i\ ,\ t_i \in I\right\}$ le voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{h}$ un supplémentaire de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Définissons :

$$\begin{array}{cccc} \phi : & V_I & \to & G \\ & Y_t = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} t_iY_i & \mapsto & \gamma_1(t_1)\cdot\dots\cdot\gamma_n(t_n) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccc} f : & \mathfrak{h}\times V_I & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & (H,Y) & \mapsto & (I_n+H)\cdot Y \end{array}$$

Alors $Df(0,0)(H,Y) = H + D\phi(0)(Y) = H + Y$. Donc $Df(0) = \mathrm{Id}$ est inversible et, par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de 0 dans $\langle$, un voisinage ouvert V de 0 dans V_I et un voisinage ouvert W de I_n dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tels que $f : U \times V \to W$ est un $\mathbb{C}^1$-difféomorphisme. Notons $f^{-1} = g : W \to U \times V$ son inverse et $g_U : W \to U$, $g_V : W \to V$ de sorte que $g = g_U \times g_V$. Comme $D\exp(0) = I_n$, quitte à restreindre U, V, W, on peut supposer que $\exp : U \times V \to W$ est aussi un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Soit $Z \in W$. Il existe alors $X \in U$, et $Y \in V$ tels que $Z = f(X,Y) + (I_n + X)\phi(Y)$. On différentie $g_U \circ f(X,Y) = X$ par rapport à Y. On obtient $0 = Dg_U\Big(f(X,Y)\Big) \circ D_2f(X,Y) = Dg_U\Big(f(X,Y)\Big) \circ \Big((I_n + X)D\phi(Y)\Big)$. Donc $0 = Dg_U(Z) \circ \Big(Z\phi(Y)^{-1}D\phi(Y)\Big)$.

L'application $\begin{array}{cccc} A : & V\times\mathfrak{g} & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & (Y,H) & \mapsto & \phi(Y)^{-1}D\phi(Y)(H) =: A_Y(H) \end{array}$ est continue, linéaire en H et à valeurs dans $\mathfrak{g}$ (considérer l'arc $\gamma(t) = \phi(Y)^{-1}\phi(Y+tH) \in G$). Comme $A_0 = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$, il résulte de la continuité du déterminant que, quitte à diminuer V, on peut supposer que pour tout $Y \in V$, l'application linéaire

A_Y est inversible et, en particulier surjective. Ainsi, pour tout $Z = f(X,Y) \in W$ et tout $H \in \mathfrak{g}$, en écrivant $H = A_Y(K)$, on obtient $Dg_U(Z)(ZH) = Dg_U(Z)(ZA_Y(K)) = 0$.

Pour $Y \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notons $\Lambda(Y)(H) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\operatorname{ad}(Y))^n}{(n+1)!}(H)$, de sorte que $D\exp(Y)(H) = \exp(Y)\Lambda(Y)(H)$. Alors pour tout $Y \in V$, on a $D\left(g_U \circ \exp\right)(Y) = Dg_U(\exp(Y)) \circ D\exp(Y) = Dg_U(\exp(Y)) \circ \exp(Y)\Lambda(Y)$. Prenant $Z = \exp(Y) \in W$, on obtient $D\left(g_U \circ \exp\right)(Y) = 0$. Donc $g_U \circ \exp$ est localement constante. Ainsi, il existe un voisinage ouvert connexe $\mathcal{V} \subset V$ de $0 \in \mathfrak{g}$ tel que pour tout $Y \in \mathcal{V}$, on a $\exp(Y) \in W$ et $g_U \circ \exp(Y) = g_U \circ \exp(0) = 0$. Or $f\Big(\{0\} \times V\Big) = \Big\{Z \in W,\ g_U(Z) = 0\Big\} = \phi(V) \subset G$. Ainsi, pour tout $Y \in \mathcal{V}$, on a $\exp(Y) \in \phi(V) \subset G$.

Soit $Y \in \mathfrak{g}$ et $t \in \mathbb{R}$. Alors il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{t}{n}Y \in \mathcal{V}$. Donc $\exp(tY) = \exp\left(\frac{t}{n}Y\right)^n \in G$. □

3.4 Un théorème de Cartan-Von Neumann

Théorème 3.14. *Soit $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ un sous-groupe fermé. Alors G est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Lemme 3.15. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments non nuls de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :*
- *$\forall n \in \mathbb{N}\ \exp(X_n) \in G$;*
- *X_n converge vers 0 ;*
- *$\frac{X_n}{\|X_n\|}$ converge vers $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Alors $Y \in \mathfrak{g}$.

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Notons $e_n = \left\lfloor \frac{t}{\|X_n\|} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$. Alors $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{t}{\|X_n\|} - e_n\right) X_n = 0$. Donc $\lim_{n\to\infty} e_n X_n = \lim_{n\to\infty} t\frac{X_n}{\|X_n\|} - \left(\frac{t}{\|X_n\|} - e_n\right) X_n = tY$. Comme $\exp(X_n) \in G$, on a $\exp(X_n)^{e_n} = \exp(e_n X_n) \in G$. Par continuité de $\exp : \mathfrak{g} \to G$, on a $\lim_{n\to\infty} \exp(e_n X_n) = \exp(tY) \in G$. Ceci étant vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $Y \in \mathfrak{g}$. □

Lemme 3.16. *Soit $\mathfrak{h}$ un supplémentaire de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathfrak{h}$ tel que $\exp(V) \cap G = \{I_n\}$.*

Démonstration. Soit V un voisinage ouvert de 0 dans $\mathfrak{h}$ tel que $\exp : V \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est injective, ce qui existe car exp est un difféomorphisme local en 0. Supposons par l'absurde que $\exp(V) \cap G \neq \{I_n\}$. Alors il existe une suite d'éléments $X_n \in V \setminus \{0\}$ tels que $X_n \to 0$ et $\exp(X_n) \in G$. La suite $\frac{X_n}{\|X_n\|}$ est contenue dans la sphère unité du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathfrak{h}$ qui est compact, donc on peut extraire une sous-suite convergent vers $Y \in \mathfrak{h}$ de norme 1. Par le lemme précédent, comme $\exp(X_n) \in G$, on a $Y \in \mathfrak{g}$. Ce qui contredit $Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g} = 0$ de norme 1. □

Démonstration du théorème. Soit $\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h} & \to & G \\ & (X,Y) & \mapsto & \exp(X)\exp(Y) \end{array}$. Alors $D\Phi(0) = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ donc, par le théorème d'inversion locale, il existe des voisinages U de 0 dans $\mathfrak{g}$ et V de 0 dans $\mathfrak{h}$ et W de I_n dans G tels que $\Phi : U \times V \to W$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme. Quitte à réduire V, on peut supposer que $\exp(V) \cap G = \{I_n\}$. Par construction, $\exp(U) = \Phi(U \times \{0\}) \subset G \cap W$.

Inversement, pour tout $\Phi(X,Y) \in G \cap W$, on a $\exp(Y) = \exp(-X)\Phi(X,Y) \in \exp(V) \cap G = \{I_n\}$. Donc par injectivité de l'exponentielle sur $U \times V$, on a $Y = 1$. Autrement dit, $\exp(U) = G \cap W$.

Ainsi, on a construit un redressement local de G en I_n, à savoir un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\Psi = \exp^{-1} : G \cap W \to U \times \{0\}$. En particulier, G est une sous-variété en I_n. Comme G est un groupe, pour tout $g \in G$, l'application $\Psi_g(x) = \Psi(g^{-1}x)$ réalise un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\Psi_g : G \cap gW \to U \times \{0\}$. □

3.5 Connexité

Soit $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ un groupe de Lie réel linéaire. En général, G n'a pas de raisons d'être connexe comme on l'a vu pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Néanmoins, étant une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, il est localement connexe par arcs. En fait, les groupes linéaires sur $\mathbb{R}$ sont presque des groupes de Lie et on a :

Lemme 3.17. *Soit $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ un groupe linéaire. S'équivalent :*

(i) G est connexe par arcs ;

(ii) G est connexe ;

(iii) tout voisinage V de $e = \mathbf{1}_G$ engendre le groupe G ;

(iv) l'image $\exp(U)$ de tout voisinage U de 0 dans $\mathfrak{g}$ engendre G.

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$ est connu.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Soit G_0 le groupe engendré par V. Alors, pour tout $g \in G_0$, l'ensemble gV est un voisinage ouvert de g contenu dans G_0. Donc G_0 est un ouvert de G. De plus $G = \bigcup_{h \in G/G_0} hG_0$ est une réunion disjointe d'ouverts. Donc chacun d'eux est fermé et, en particulier, G_0 est fermé. Par connexité de G, comme G_0 est non vide, on a $G = G_0$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert $U' \subset U$ de $\mathfrak{g}$ contenant 0 et un voisinage ouvert V de I_n dans G tel que exp réalise un difféomorphisme local entre U' et V. Donc $V = \exp(U')$ engendre G, donc $\exp(U)$ aussi.

$(iv) \Rightarrow (i)$: Soit $g, h \in G$. Comme $\exp(U)$ engendre G, il existe des éléments $X_1, \dots, X_N \in \mathfrak{g}$ tels que $hg^{-1} = \exp(X_1) \cdots \exp(X_N)$. Alors $t \in [0,1] \mapsto \exp(tX_1) \cdots \exp(tX_N) \cdot g$ est un chemin continu entre g et h. □

On note G° la composante connexe de l'élément neutre de G.

Proposition 3.18. *L'ensemble G° est un sous-groupe ouvert fermé distingué de G engendré par* $\exp(\mathfrak{g})$.

Démonstration. Comme $\Phi : (g,h) \in G \times G \mapsto gh^{-1}$ est continue, $\Phi(G^\circ \times G^\circ)$ est une partie connexe de G contenant l'élément neutre car $\Phi(e,e) = e$. Donc G° est un sous-groupe de G.

Pour tout $g \in G$, l'application $c_g : h \in G \mapsto ghg^{-1}$ est continue. Donc $c_g(G^\circ) = gG^\circ g^{-1}$ est une partie connexe de G contenant l'élément neutre car $c_g(e) = e$. Donc $gG^\circ g^{-1} \subset G^0$. De même, $g^{-1}G^\circ(g^{-1})^{-1} \subset G^0$, donc G° est distingué dans G. Le groupe G° est fermé dans G car c'est une composante connexe. Enfin, on obtient que G° est ouvert car engendré par l'ouvert connexe $\exp(\mathfrak{g})$ en appliquant le lemme précédent à G° qui est un groupe linéaire connexe, on a le résultat. □

3.6 Un peu de culture

Dans la suite, on se fixe un entier $n \geq 1$, et on note $\mathbb{D}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices diagonales inversibles de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$; $\mathbb{T}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathbb{U}_n(\mathbb{R})$) le groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$ (resp. et ayant des 1 sur la diagonale) ; $K = \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$; $A = \mathbb{D}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$; W le groupe des matrices de permutations $P_\sigma = \left[\delta_{i\sigma(j)}\right]_{1 \leq i,j \leq n}$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

On peut démontrer dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ les trois décompositions suivantes :

Proposition 3.19 (Décomposition de Cartan)**.**

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = KAK$$

Proposition 3.20 (Décomposition d'Iwasawa)**.** *On a un homéomorphisme :*

$$\begin{array}{ccc} K \times A \times \mathbb{U}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \\ (k,a,n) & \mapsto & kan \end{array}$$

Proposition 3.21 (Décomposition de Bruhat)**.**

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{U}_n(\mathbb{R}) W \mathbb{T}_n(\mathbb{R})$$

Les décompositions remarquables précédentes sont en fait des cas très particuliers de décompositions plus générales. Avant d'en arriver à ces décompositions on doit développer un peu de théorie de structure des groupes de Lie, des groupes algébriques et de théorie des représentations. En fait, la représentation adjointe joue un rôle central dans la décomposition des groupes de Lie. On appelle caractère un morphisme de groupes $\chi : G \to K^\times$. Comme on a un groupe commutatif à l'arrivée, on sait que tout caractère est constant sur les classes de conjugaison ; trivial sur les commutateurs $[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$. En particulier, il est alors plus naturel de s'intéresser aux caractères définis sur des sous-groupes commutatifs uniquement. Notons $X^*(G)$ l'ensemble des caractères de G. On peut le munir d'une structure naturelle de $\mathbb{Z}$-module par $\chi_1 + \chi_2 = (g \mapsto \chi_1(g)\chi_2(g))$ et $n \cdot \chi = (g \mapsto \chi(g)^n)$. On peut établir une « dualité » avec l'ensemble des sous-groupes à 1 paramètre $\theta : \mathbb{R}^\times \to G$ (qu'on appelle alors co-caractères de G).

Prenons l'exemple de $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Si H est un sous-groupe commutatif de G, alors les matrices qui constituent H commutent deux à deux et sont donc co-trigonalisables. Comme des ensembles de matrices triangulaires ne forment pas toujours des groupes commutatifs, on va se restreindre aux sous-groupes commutatifs formés de matrices diagonalisables (on parlera de groupe diagonalisable) ; et parce qu'on a de la topologie, on imposera, de plus, que nos sous-groupes soient connexes. On en vient alors à la définition suivante : un *tore* est un groupe de Lie diagonalisable connexe. Si G est un groupe commutatif, on pourra remarquer que son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est « commutative », c'est-à-dire que le crochet de Lie $[\cdot,\cdot]$ est trivial sur $\mathfrak{g}$. On se donne maintenant G un groupe de Lie et T un sous-tore maximal de G (typiquement $\mathbb{D}_n \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On a une action de T sur $\mathfrak{g}$ donnée par $t \cdot X = \mathrm{Ad}(t)(X)$ $(= tXt^{-1}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$. Pour tout caractère $\chi : T \to \mathbb{R}^\times$, on note alors $\mathfrak{g}_\chi = \{X \in \mathfrak{g},\ t \cdot X = \chi(t)X\}$. On peut alors montrer, sous des hypothèses raisonnables vérifiées par les groupes classiques, que $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_\chi \mathfrak{g}_\chi$.

Pour $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, on obtient typiquement que $\mathfrak{g}_\chi \neq \{0\}$ si, et seulement si, $\chi(\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n)) = t_i t_j^{-1}$ avec $i \neq j$. Dans ce cas, $\mathfrak{g}_\chi = \mathbb{R}E_{i,j}$ et $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j} = \exp(\lambda E_{i,j})$ est un sous-groupe à un paramètre de $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Les χ ainsi obtenus forment un ensemble (doté de propriétés de symétries remarquables !) ; on les appelle racines de G et les groupes $G_\chi = T_{i,j}(\mathbb{R}) = \exp(g_\chi)$ sont appelés groupes radiciels. L'ensemble de racines, ainsi défini, va alors former un invariant qui permettra de classifier les groupes de Lie « simples », modulo leur centre.