Formes hermitiennes et espaces hermitiens

Leçons directement concernées (2020)

(158)* Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
(159) Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.
(160)* Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie)

Leçons liées, dans lesquelles on doit évoquer les formes euclidiennes ou hermitiennes (2020)

(106) Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.
(150)* Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.
(153) Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
(155)* Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
(170) Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
(171)* Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Leçons où des formes hermitiennes peuvent également apparaître sporadiquement (2020)

(107) Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Exemples.
(151) Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.
(154)* Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
(161)* Distances et isométries d'un espace affine euclidien.
(191) Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.

Ce qui est dans le programme

(c) Espaces vectoriels euclidiens, espaces vectoriels hermitiens. Isomorphisme d'un espace vectoriel euclidien avec son dual. Supplémentaire orthogonal. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme. Bases orthonormales.
(d) Groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal. Exemple de générateurs du groupe orthogonal : décomposition d'un automorphisme orthogonal en produit de réflexions. Endomorphismes symétriques, endomorphismes normaux. Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique. Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles, l'une étant définie positive. Décomposition polaire dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Espaces vectoriels euclidiens de dimension 2, classification des éléments de $\mathcal{O}(2,\mathbb{R})$. Espaces vectoriels euclidiens de dimension 3, classification des éléments de $\mathcal{O}(3,\mathbb{R})$; produit mixte, produit vectoriel.
(e) Groupe unitaire, groupe spécial unitaire. Diagonalisation des endomorphismes normaux. Décomposition polaire dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$.

Bibliographie

- Gourdon, *Algèbre* (2008).
- Perrin, *Cours d'algèbre* (1996).
- À suivre...

1 Formes sesquilinéaires et espaces hermitiens

Soit L un corps de caractéristique différente de 2 et $\sigma \in \mathrm{Aut}(L)$ un élément tel que $\sigma^2 = \mathrm{id}_L$. On note $K = L^\sigma = \{x \in L,\ \sigma(x) = x\}$.

Pour alléger les notations, on notera $\overline{x}$ au lieu de $\sigma(x)$.

Lemme 1.1. *L/K est une extension de corps et $[L : K] \leqslant 2$.*

De plus, il existe $a \in L$ tel que $L = K[a]$.

Démonstration. K est un sous-anneau de L stable par division donc un corps.

Si $\sigma = \mathrm{id}_L$, alors $L = K$ et $a = 1$ convient.

Sinon, il existe $b \in L$ tel que $\sigma(b) = \overline{b} \neq b$. On pose $a = b - \overline{b}$. Alors $\overline{a} = \overline{b - \overline{b}} = \overline{b} - b = -a$. De plus $a \neq 0$ car sinon cela contredirait $\overline{b} \neq b$. Montrons que $L = K \oplus Ka$. Par construction $a \notin K$ car $a \neq 0$ et comme L est un K-espace vectoriel, on a que les espaces K et Ka sont en somme directe. Il suffit de montrer qu'ils engendrent L. Soit $x \in L$. Posons $\lambda = \frac{x+\overline{x}}{2}$ et $\mu = \frac{x-\overline{x}}{2a}$. Alors $\overline{\lambda} = \frac{\overline{x}+x}{2} = \lambda$ et $\overline{\mu} = \frac{\overline{x}-x}{-2a} = \mu$. Ainsi $\lambda, \mu \in K$ et $x = \lambda + a\mu$. □

Pour simplifier, dans la suite du cours, vous pouvez vous contenter de penser qu'on est dans l'une des deux situations suivantes :

1. $L = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$ et σ est la conjugaison complexe ;
2. $L = K$ et $\sigma = \mathrm{id}_K$.

Dans toute la suite, on se fixe V un L-espace vectoriel de dimension finie n (c'est donc un K-espace vectoriel de dimension $2n$ si $L \neq K$: penser par exemple que $\mathbb{C}^n$ est aussi naturellement un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$, dont on a oublié la structure complexe).

1.1 Formes sesquilinéaire

Les formes sesquilinéaires jouent un rôle analogue aux formes bilinéaires à ceci près qu'elles tiennent, en plus, compte de la « structure complexe » sur V.

Définition 1.2. Une *forme sesquilinéaire* sur V est une application $\varphi : V \times V \to L$ telle que :

— $\forall x \in V,\ y \mapsto \varphi(x, y)$ est L-linéaire ;

— $\forall y \in V,\ x \mapsto \varphi(x, y)$ est semi-linéaire, c'est-à-dire que

$$\forall z, z' \in V,\ \forall \lambda, \mu \in L,\ \varphi(\lambda z + \mu z', y) = \overline{\lambda}\varphi(z, y) + \overline{\mu}\varphi(z', y).$$

Remarque 1.3. Si $\sigma = \mathrm{id}_L$, alors φ est en fait une forme bilinéaire.

Le choix semi-linéaire à gauche plutôt qu'à droite est arbitraire mais a une incidence sur les notations. Si on fait un choix différent, il faudra inverser la gauche et la droite dans tout ce qui va suivre.

Notation 1.4. La matrice d'une forme sesquilinéaire φ dans une L-base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de V, est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = [\varphi(e_i, e_j)]_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Pour toute matrice $M = [m_{i,j}]_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(L)$, on note $\overline{M} = [\overline{m_{i,j}}]_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_{n,m}(L)$ et $M^* = {}^t\overline{M}$.

Fait 1.5. *Soit φ une forme sesquilinéaire sur V. Pour $x, y \in V$, si $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(L)$ représentent x, y respectivement, alors $\varphi(x, y) = X^* \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)Y$.*

Soit $\varphi : V \times V \to L$ une forme sesquilinéaire où V est de dimension finie. On dispose d'une paire d'espaces (V, V) qui sont presque en dualité via φ. Ceci permet de définir une application $\ell_\varphi : V \to V^*$ donnée par $\ell_\varphi(y) = \varphi_y = (x \mapsto \varphi(x, y))$. L'application ℓ_φ est semi-linéaire.

Définition 1.6. On appelle noyau de φ, noté $\ker\varphi = \{y \in E,\ \ell_\varphi(y) = \varphi_y = 0\}$.

On dit que φ est *non-dégénérée* si $\ker\varphi = 0$ ou, ce qui est équivalent, si ℓ_φ est injective.

Remarque 1.7. Attention : a priori, cette définition n'est pas symétrique en x et en y et on n'a a priori pas de structure L-linéaire dans l'autre sens (il n'y a pas de structure L-linéaire des formes semi-linéaires).

1.2 Formes hermitiennes et antihermitiennes

Définition 1.8. Une forme sesquilinéaire φ est dite *hermitienne* (resp. *antihermitienne*) si $\forall x, y \in V$ on a $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$ (resp. $\varphi(x,y) = -\overline{\varphi(y,x)}$).

Fait 1.9. *Matriciellement,*

$$\varphi \text{ est hermitienne } \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)^* = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$$

et

$$\varphi \text{ est antihermitienne } \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)^* = -\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$$

Proposition 1.10. *(1) L'ensemble des formes sesquilinéaire* $\mathrm{Sesq}(V)$ *est un K-espace vectoriel. L'ensemble des formes hermitiennes $\mathcal{H}(V)$ (resp. antihermitiennes $\mathcal{AH}(V)$) en sont des K-sous-espace vectoriels.*

(2) Toute forme sesquilinéaire se décompose de manière unique en somme d'une forme hermitienne et d'une forme antihermitienne. En particulier, comme K-espace vectoriel, $\mathrm{Sesq}(V)$ *est somme directe de $\mathcal{H}(V)$ et de $\mathcal{AH}(V)$.*

Démonstration. (1) est évident.

(2) **Existence :** Les formes sesquilinéaires $\varphi_h : (x,y) \mapsto \varphi(x,y) + \overline{\varphi(y,x)}$ et $\varphi_a : (x,y) \mapsto \varphi(x,y) - \overline{\varphi(y,x)}$ sont respectivement hermitienne et antihermitienne (attention à l'ordre de x et y !), ce qui donne l'existence.

Unicité : Si $\varphi = \varphi'_h + \varphi'_a$ pour φ'_h forme hermitienne et φ'_h forme antihermitienne, alors $\psi = \varphi_h - \varphi'_h = \varphi'_a - \varphi_a$ est simultanément hermitienne et antihermitienne. Mais alors, pour tout $(x,y) \in V \times V$, on a

$$\psi(x,y) = (\varphi_h - \varphi'_h)(x,y) = \overline{(\varphi_h - \varphi'_h)(x,y)} = \overline{(\varphi'_a - \varphi_a))(x,y)} = -(\varphi'_a - \varphi_a)(x,y) = -\psi(x,y).$$

Ainsi, l'hypothèse $\mathrm{car}(K) \neq 2$ assure que $\psi = 0$. ☐

Remarque 1.11. Si $\sigma = \mathrm{id}_K$, alors une forme sesquilinéaire est en fait K-bilinéaire. Une forme hermitienne est alors dite *symétrique* et une forme antihermitienne est dite *antisymétrique*.

1.3 Orthogonalité

Pour définir une notion robuste d'orthogonalité, on a besoin d'une certaine symétrique en les deux paramètres d'une forme sesquilinéaire.

Définition 1.12. Une forme sesquilinéaire est dite *réflexive* si $\varphi(x,y) = 0 \Rightarrow \varphi(y,x) = 0$.

Exemple 1.13. Les formes hermitiennes, anti-hermitiennes, symétriques, anti-symétriques sont des exemples de formes sesquilinéaires réflexives.

Définition 1.14. Soit $\varphi : V \times V \to L$ une forme sesquilinéaire réflexive. On définit naturellement les notions d'orthogonalités des sous-L-espaces vectoriels de V par rapport à φ comme suit :

$$W^\perp = \{x \in V,\ \forall y \in W,\ \varphi(x,y) = 0\} = \{x \in V,\ \forall y \in W,\ \varphi(y,x) = 0\}$$

Fait 1.15. *Une forme sesquilinéaire φ est non-dégénérée si, et seulement si, $V^\perp = 0$.*

Proposition 1.16. *Soit V de dimension finie et $\varphi : V \times V \to L$ une forme sesquilinéaire réflexive supposée* **non-dégénérée**. *On a les résultats usuels sur les espaces orthogonaux, à savoir, pour W, W_1, W_2 des sous-espaces vectoriels de V :*

1. $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$ *;*
2. $0^\perp = V$ *et* $V^\perp = 0$*, donc* $(V^\perp)^\perp = V$ *;*
3. $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$ *;*
4. $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

Démonstration. Par définition, un jeu de réécriture donne $W^\perp = (\ell_\varphi(W))^\top$ où l'application semi-linéaire $\ell_\varphi : V \to V^*$ est vue comme application K-linéaire, qui est un isomorphisme car φ est non-dégénérée. Ces résultats découlent donc directement de ceux obtenus en dualité. ☐

1.4 Les cas réels et complexes : espaces euclidiens et hermitiens

Supposons que $L = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dans cette partie du cours.

Définition 1.17. On dit qu'une forme hermitienne φ est :
- *positive* si $\forall x \in V,\ \varphi(x,x) \geqslant 0$;
- *négative* si $\forall x \in V,\ \varphi(x,x) \geqslant 0$;
- *définie positive* si $\forall x \in V \setminus \{0\},\ \varphi(x,x) > 0$;
- *définie négative* si $\forall x \in V \setminus \{0\},\ \varphi(x,x) > 0$.

Proposition 1.18 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soit φ une forme hermitienne* **positive** *sur V. Alors pour tous $x, y \in V$, on a*

$$\varphi(x,y)\overline{\varphi(x,y)} \leqslant \varphi(x,x)\varphi(y,y).$$

Démonstration. On considère l'application $P : L \to L$ suivante :

$$\begin{aligned} P(t) =& \varphi(x+ty, x+ty) \\ =& \varphi(x, x+ty) + \bar{t}\varphi(y, x+ty) && \text{par semi-linéarité à gauche} \\ =& \varphi(x,x) + t\varphi(x,y) + \bar{t}\varphi(y,x) + \bar{t}t\varphi(y,y) && \text{par linéarité à droite} \\ =& \varphi(x,x) + t\varphi(x,y) + \overline{t\varphi(x,y)} + \bar{t}t\varphi(y,y) && \text{par hermitianité de } \varphi \end{aligned}$$

Distinguons deux cas.

1er cas : On suppose que $\varphi(x,x) = \varphi(y,y) = 0$. Alors la restriction de P à $K = \mathbb{R}$ est une application linéaire $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $t \mapsto t(\varphi(x,y) + \overline{\varphi(x,y)}) = 2t\mathfrak{Re}(\varphi(x,y))$ qui garde un signe positif. C'est donc l'application nulle, ce qui montre que $\mathfrak{Re}(\varphi(x,y)) = 0$.

Dans le cas $L = \mathbb{C}$, considérons également la restriction de P à $i\mathbb{R}$. C'est donc une application $\mathbb{R}$-linéaire $i\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $it \mapsto it\varphi(x,y) - it\overline{\varphi(x,y)} = -2t\mathfrak{Im}(\varphi(x,y))$ qui garde un signe constant positif. C'est donc l'application nulle, ce qui montre que $\mathfrak{Im}(\varphi(x,y))$.

Ainsi, dans ce premier cas, on a $\varphi(x,y) = 0$ d'où les deux termes de l'inégalité de Cauchy-Schwarz sont nuls.

2nd cas : Quitte à échanger les rôles de x et y, on peut supposer que $\varphi(y,y) > 0$. Posons astucieusement $t = -\frac{\overline{\varphi(x,y)}}{\varphi(y,y)}$ qui correspondrait au lieu du minimum de ce polynôme dans le cas réel. On a alors

$$\begin{aligned} P(t) =& \varphi(x,x) - \frac{\overline{\varphi(x,y)}}{\varphi(y,y)}\varphi(x,y) - \frac{\varphi(x,y)}{\varphi(y,y)}\overline{\varphi(x,y)} + \frac{\overline{\varphi(x,y)}}{\varphi(y,y)}\frac{\varphi(x,y)}{\varphi(y,y)}\varphi(y,y) \\ =& \varphi(x,x) - \frac{\varphi(x,y)\overline{\varphi(x,y)}}{\varphi(y,y)} \geqslant 0. \end{aligned}$$

Ce qui conclut. □

Définition 1.19. On appelle *espace hermitien* un couple (H, φ) formé d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et d'une forme hermitienne définie positive φ.

On appelle *espace euclidien* un couple (E, φ) formé d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et d'une forme bilinéaire symétrique définie positive φ.

Sur un tel espace, la forme φ permet de définir une norme $\|\cdot\| : x \mapsto \varphi(x,x)$. On dit que φ est un produit scalaire hermitien (resp. euclidien).

Proposition 1.20 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soit (H, φ) un espace hermitien. Alors pour tous $x, y \in H$, on a*

$$|\varphi(x,y)| \leqslant \|x\|\|y\|$$

avec égalité si, et seulement si, la famille (x,y) est liée.

Démonstration. Le cas d'égalité correspond à $P(t) = 0$, donc à $x + ty = 0$ par non-dégénérescence. □

Corollaire 1.21. *Une forme hermitienne positive est définie si, et seulement si, elle est non dégénérée.*

1.5 Isotropie

Définition 1.22. Soit φ une forme sesquilinéaire réflexive.

Un vecteur $x \in V \setminus \{0\}$ est dit *isotrope* si $\varphi(x,x) = 0$, et *anisotrope* sinon.

On dit que φ est *isotrope* s'il existe un vecteur $x \in V \setminus \{0\}$ qui est isotrope, et *anisotrope* sinon.

Un sous-espace $W \subset V$ est dit :

— *totalement isotrope* si tous les vecteurs de W sont isotropes ;

— *isotrope* s'il contient un sous-espace totalement isotrope ;

— *anisotrope* sinon.

Lemme 1.23. *Un sous-espace W est totalement isotrope pour φ si, et seulement si, $\sigma \neq \mathrm{id}_L$ et $\varphi_{|W\times W} = 0$, ou $\sigma = \mathrm{id}_L$ et $\varphi_{|W\times W}$ est antisymétrique.*

Démonstration. Supposons W totalement isotrope. Alors pour tout $x, y \in W$ et tout $t \in L$, on a $0 = \varphi(x+ty, x+ty) = \underbrace{\varphi(x,x)}_{=0} + \bar{t}\varphi(y,x) + t\varphi(x,y) + t\bar{t}\underbrace{\varphi(y,y)}_{=0}$. Donc pour tout $t \in L^*$, on a $\varphi(x,y) = -\frac{\bar{t}}{t}\varphi(y,x)$. En particulier pour $t = 1$, cela donne $\varphi(y,x) = -\varphi(x,y)$. Donc $\varphi_{|W\times W}$ est antisymétrique dans le cas $K = L$. Finalement, dans le cas $K \neq L$, on a alors $\varphi(x,y) = \frac{\bar{t}}{t}\varphi(x,y)$, donc il existe $t \in L^*$ tel que $t \neq \bar{t}$ d'où $\varphi(x,y) = 0$. □

En conséquence, on observe alors que

Fait 1.24. *W est φ-isotrope si, et seulement si la matrice de φ dans une base de W est nulle dans le cas $L \neq K$ et antisymétrique dans le cas $L = K$.*

En particulier, si φ est hermitienne, on a $W \subset W^\perp$.

Proposition 1.25. *Soit φ une forme sesquilinéaire réflexive sur V et W un sous-espace vectoriel de V.*

(1) S'équivalent :

(i) $\varphi_{|W\times W}$ est non-dégénérée ;

(ii) $W \cap W^\perp = 0$;

(iii) $W \oplus W^\perp = V$.

(2) Si W est anisotrope alors les conditions précédentes sont réalisées.

Démonstration. Montrons (1).

(i) ⇒ (ii) : $\forall x \in W \setminus \{0\},\ \exists y \in W,\ \varphi(x,y) \neq 0$. Donc $x \neq W^\perp$.

(ii) ⇒ (iii) : $\dim W^\perp \geqslant \dim(V) - \dim(W)$ et $\dim(W \oplus W^\perp) \leqslant \dim(V)$. Donc il y a égalité partout.

(iii) ⇒ (i) : $\ker \ell_{\varphi_{|W\times W}} = W \cap W^\perp = 0$.

Montrons (2). Soit $x \in W$. Si $x \in W^\perp$, alors $\varphi(x,x) = 0$ par définition. Donc $x = 0$ car W est anisotrope. Ainsi $W \cap W^\perp = 0$. □

1.6 Bases orthogonales

Définition 1.26. Soit φ une forme sesquilinéaire réflexive (e.g. une forme hermitienne). Une base $(e_1, \dots, e_n)$ de V est dite *orthogonale* pour φ (ou φ-orthogonale) si $\forall i \neq j,\ \varphi(e_i, e_j) = 0$. Si, de plus, $\forall i,\ \varphi(e_i, e_i) = 1$, alors la base est dite *orthonormée*.

Fait 1.27. *(1) La matrice de φ dans une base orthogonale est diagonale.*

(2) La matrice de φ dans une base orthonormée est l'identité.

L'un des intérêts des bases orthogonales est de pouvoir classifier dans certains cas favorables (e.g. corps réel ou complexe) les formes sesquilinéaires : ces classifications sont hors-programme de l'agrégation et on n'en parlera pas. Il n'est cependant pas toujours possible de trouver une base orthogonale. Voici un théorème d'existence.

Proposition 1.28. *Soit φ une forme hermitienne. Alors il existe une base φ-orthogonale de V.*

Démonstration. On procède par récurrence sur $n = \dim(V)$. Si $n = 1$, c'est évident. Sinon, soit e_1 un vecteur non-isotrope et $W = Le_1$. Alors φ restreinte à $W \times W$ est non-dégénérée donc W et $W^\perp$ sont en somme directe. On conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à $W^\perp$. □

Sur un corps quelconque, il n'existe pas toujours de base orthonormée. C'est néanmoins le cas pour les formes hermitiennes sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Proposition 1.29 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Gram-Schmidt)**.** *Soit* (H, φ) *un espace hermitien et* $(e_1, \dots, e_n)$ *une base quelconque de* H*. Alors il existe une* $\mathbb{K}$*-base* $(f_1, \dots, f_n)$ *de* H *qui est* φ*-orthonormée et telle que* $\mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_m) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_m)$ *pour tout* $1 \leq m \leq n$*.*

Démonstration. Pour $m = 1$, on pose $f_1 = \frac{e_1}{\sqrt{\varphi(e_1,e_1)}}$.

Supposons $(f_1, \dots, f_m)$ construite de sorte que $\varphi(f_i, f_i) = 1$ et $\varphi(f_i, f_j) = 0$ pour $1 \leq i \neq j \leq m$ et $\mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_m) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_m)$. Soit $g_{m+1} = e_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} \varphi(e_{m+1}, f_i) f_i \neq 0$ car $e_{m+1} \notin \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_m)$. On pose $f_{m+1} = \frac{g_{m+1}}{\sqrt{\varphi(g_{m+1}, g_{m+1}}}$. On vérifie alors par linéarité de f_{m+1} convient. □

2 Endomorphismes remarquables d'un espace hermitien

Dans cette section, on se fixe φ une forme sesquilinéaire (ou hermitienne) non dégénérée sur V. On supposera toujours que V est de dimension finie.

2.1 Adjoint d'un endomorphisme

Fait 2.1. *Pour toute forme linéaire* $f \in V^*$*, il existe un unique* $x = x_f \in V$ *tel que* $\varphi(x_f, \cdot) = f$*.*

Démonstration. Comme φ est non-dégénérée, on a un morphisme semi-linéaire injectif $\ell_\varphi : V \to V^*$ donné par $x \mapsto \varphi(x, \cdot)$. C'est donc un isomorphisme entre K-espaces vectoriels donc, en particulier, une bijection. □

Proposition-définition 2.2. Soit $u \in \mathrm{End}_L(V)$. Il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathrm{End}_L(V)$ tel que

$$\forall x, y \in V, \ \varphi(u^*(x), y) = \varphi(x, u(y)).$$

On l'appelle *endomorphisme adjoint* de u.

Démonstration. Matriciellement, on a $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \in \mathrm{GL}_n(L)$ car φ est non dégénérée. Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = (M^{-1})^* \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^* M^*$ convient. □

Corollaire 2.3. *Soit* $u, v \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$*. On a les égalités :*

1. $(\lambda u)^* = \overline{\lambda} u^*$ *;*
2. $(u_1 + u_2)^* = u_1^* + u_2^*$ *;*
3. $(u_1 \circ u_2)^* = u_2^* \circ u_1^*$*.*

Si, de plus, φ *est* **hermitienne***, alors*

4. $(u^*)^* = u$*.*

Démonstration. C'est immédiat par un calcul matriciel. □

Définition 2.4 (Endomorphismes remarquables)**.** Soit $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. On dit que u est :

— *normal* si $u^* \circ u = u \circ u^*$;
— *hermitien* si $u^* = u$ (*symétrique* si $L = K$) ;
— *antihermitien* si $u^* = -u$ (*antisymétrique* si $L = K$) ;
— *unitaire* si $u^* \circ u = \mathrm{id}_V$ (*orthogonal* si $L = K$).

Fait 2.5. *Les endomorphismes hermitiens, antihermitiens, unitaires sont normaux.*

Remarque 2.6. On trouve aussi parfois la terminologie *endomorphisme auto-adjoint* – au lieu de symétrique, hermitien – mais ceci s'intéresse davantage aux espaces de dimension infinie provenant de l'analyse.

Définition 2.7. L'ensemble $\mathcal{U}(\varphi)$ (resp. $\mathcal{O}(\varphi)$) des endomorphismes unitaires (resp. orthogonaux) pour φ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ appelé *groupe unitaire* (resp. *groupe orthogonal*).

On note également $\mathcal{SU}(\varphi)$ (resp. $\mathcal{SO}(\varphi)$) le sous-groupe des endomorphismes unitaires (resp. orthogonaux) de déterminant 1, appelé *groupe spécial unitaire* (resp. *groupe spécial orthogonal*).

2.2 Réduction des endomorphismes normaux

On suppose désormais que φ est une **forme hermitienne anisotrope** donc, en particulier, non-dégénérée. C'est par exemple le cas d'une forme hermitienne définie positive ou négative sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Lemme 2.8. *Si u est un endomorphisme normal et $P \in L[X]$, alors $P(u)$ est normal.*

Démonstration. $P(u)^* = \overline{P}(u^*)$. Donc si u et u^* commutent, alors $P(u)$ et $P(u^*)$ aussi. □

Proposition 2.9. *Si u est un endomorphisme normal et $P \in L[X]$, alors $(\ker P(u))^{\perp}$ est stable par u.*

Démonstration. Soit $y \in (\ker P(u))^{\perp}$ et $x \in \ker P(u)$. On veut montrer que $\varphi(x, u(y)) = 0$. On a $\varphi(x, u(y)) = \varphi(u^*(x), y)$. Mais $P(u) \circ u^*(x) = u^* \circ P(u)(x) = 0$. Donc $u^*(x) \in \ker P(u)$. Donc $\varphi(u^*(x), y) = 0$. □

Proposition 2.10. *On a* $\ker u^* = (\operatorname{im} u)^{\perp}$ *et* $\operatorname{im}(u^*) = (\ker u)^{\perp}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} y \in \ker u^* &\Leftrightarrow \forall x \in V,\ \varphi(u^*(y), x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in V,\ \varphi(y, u(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow y \in (\operatorname{im} u)^{\perp} \end{aligned}$$

En échangeant u et u^*, on a $\ker u = (\operatorname{im} u^*)^{\perp}$. On conclut car, comme φ est anisotrope donc non-dégénérée, en dimension finie on a $\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$ pour tout sous-espace vectoriel W de V. □

Proposition 2.11. *Si u est normal, alors* $\operatorname{im} u = (\ker u)^{\perp}$.

Démonstration. Soit $x \in (\operatorname{im} u)^{\perp}$. On a

$$\begin{aligned} \varphi(u(x), u(x)) &= \varphi(u^*(u(x)), x) \\ &= \varphi(u(u^*(x)), x) && \text{car } u \text{ est normal} \\ &= 0 && \text{car } x \in (\operatorname{im} u)^{\perp} \end{aligned}$$

Comme φ est anisotrope, on a $u(x) = 0$ donc $x \in \ker u$. Ainsi $(\operatorname{im} u)^{\perp} \subset \ker u$. On a égalité par égalité des dimensions en appliquant le théorème du rang : $\dim \operatorname{im} u = \dim V - \dim \ker u = \dim (\ker u)^{\perp}$. □

Théorème 2.12. *Soit u un endomorphisme normal et $\chi_u = \prod_{i=1}^{m} P_i^{m_i}$ la décomposition du polynôme caractéristique de u en puissances de polynômes irréductibles unitaires deux à deux premiers entre eux. Alors*

$$V = \overset{\perp}{\bigoplus_{i \in [\![1,m]\!]}} \ker P_i(u).$$

En particulier, si χ_u est scindé, alors u normal est diagonalisable en base orthogonale pour φ.

Démonstration. On a vu que $P_i(u)$ est normal et que $\operatorname{im} P_i(u) = (\ker P_i(u))^{\perp}$. De plus, $\operatorname{im} P_i(u) \cap \ker P_i(u) = 0$ car φ est anisotrope. Donc on en déduit par récurrence immédiate que $\ker P_i(u)^j = \ker P_i(u)$ pour tous $i, j \geq 1$. Le lemme des noyaux nous donne $V = \bigoplus_{i \in [\![1,m]\!]} \ker P_i(u)^{m_i} = \bigoplus_{i \in [\![1,m]\!]} \ker P_i(u)$. Il suffit de vérifier que la somme directe est orthogonale.

Par Bézout, il existe des polynômes $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $UP_i + VP_j = 1$. Soit $x \in \ker P_j(u)$ qu'on écrit $x = U(u) \circ P_i(u)(x) + V(u) \circ P_j(u)(x) = P_i(u) \circ U(u)(x) \in \operatorname{im} P_i(u) = (\ker P_i(u))^{\perp}$. Ainsi $\ker P_j(u) \subset (\ker P_i(u))^{\perp}$, donc la somme directe est orthogonale. □

2.3 Théorème spectral : les cas réels et complexes

On se place désormais systématiquement dans le cas $L = \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Corollaire 2.13 (Théorème spectral hermitien)**.**
On suppose que φ est hermitienne définie positive. Soit $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Alors

1. *u est normal si, et seulement si, u est diagonalisable en base φ-orthonormée ;*
2. *u est φ-autoadjoint si, et seulement si, u est diagonalisable en base φ-orthonormée et ses valeurs propres sont réelles ;*
3. *u est unitaire si, et seulement si, u est diagonalisable en base φ-orthonormée et ses valeurs propres sont de module 1.*

Corollaire 2.14 (Théorème spectral euclidien)**.**
On suppose que (V, φ) est un espace euclidien. Soit $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$. Alors

$$u \text{ est symétrique } \iff u \text{ est diagonalisable en base } \varphi\text{-orthonormée},$$

$$u \text{ est normal } \iff u \text{ est diagonalisable par blocs en base } \varphi\text{-orthonormée},$$

$$\text{avec des blocs de la forme } M_i = \begin{cases} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} & \text{avec } b \in \mathbb{R}^* \text{ et } a \in \mathbb{R} \\ (a) & \text{avec } a \in \mathbb{R} \end{cases}, \text{ et}$$

$$u \text{ est orthogonal } \iff u \text{ est diagonalisable par blocs en base } \varphi\text{-orthonormée}$$

$$\text{avec des blocs de la forme } M_i = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} & \text{avec } \theta \in \mathbb{R} \\ (a) & \text{avec } a \in \{\pm 1\} \end{cases},$$

Les démonstrations de ces deux corollaires sont laissées en exercice au lecteur qui pourra alors s'assurer avoir bien compris le théorème de réduction des endomorphismes normaux.