ÉNS de Lyon
M2 FEADéP

Cours d'algèbre
2019–2020

# Feuille d'exercices n°11 : Décompositions matricielles.

Dans toute cette feuille, $K$ désigne un corps quelconque et $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## À faire

**Exercice 1.** ***(Variantes sur la décomposition* LU*)***

1. Montrer que la décomposition de $A = LU$ existe encore si $\det(A) = 0$ et les autres mineurs principaux sont inversibles.
2. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Montrer qu'il existe deux matrices de permutations $P, Q$, une matrice unitriangulaire inférieure et une matrice triangulaire supérieur $U$ telles que $PAQ = LU$.

**Exercice 2.** ***(Décomposition* LU *et norme)***
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $A$ admet une décomposition LU avec $L = (\ell_{i,j})$ unitriangulaire inférieure et $U = (u_{i,j})_{i,j}$ triangulaire supérieure, telles que $\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n$, on ait $|\ell_{i,j}| \leqslant 1$ et $|u_{i,j}| \leqslant |u_{i,i}|$.

1. On note $A_i$ et $U_i$ la $i$-ème ligne de $A$ et $U$ respectivement. Montrer que $U_i = A_i - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{i,j} U_j$ et que $\|U\|_\infty \leqslant 2^{n-1} \|A\|_\infty$.
2. Approximation du cas d'égalité : On pose
$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 1 & \text{si } j = n, \\ -1 & \text{si } i > j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \textit{i.e.} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
Montrer que $A$ admet une décomposition LU vérifiant les conditions de l'énoncé, et en particulier, $|\ell_{i,j}| \leqslant 1$ et $u_{n,n} = 2^{n-1}$ et comparer $\|U\|_\infty$ avec $\|A\|_\infty$.
3. (Facultatif) Montrer qu'il existe des matrices de permutations $P, Q$ telles que $PAQ = LU$ vérifie les conditions de l'énoncé.
*Indication : penser au pivot de* Gauss.

**Exercice 3.** ***(Matrices bandes)***
On appelle *matrice bande* de largeur de bande basse $k_1 \in [\![0, n-1]\!]$ et de largeur de bande haute $k_2 \in [\![0, n-1]\!]$ une matrice $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(K)$ vérifiant
$$i > j + k_1 \Rightarrow a_{i,j} = 0 \qquad\qquad j > i + k_2 \Rightarrow a_{i,j} = 0$$

1. Voir qu'une matrice triangulaire supérieure est une matrice bande de largeurs $k_1 = 0$ et $k_2 = n - 1$.
2. Quel est le coût en mémoire de stockage d'une matrice bande de largeurs $k_1$ et $k_2$ ? Autrement dit, combien de coefficients non nuls, une matrice bande a-t-elle au minimum, en fonction de $n$, $k_1$ et $k_2$ ? Simplifier la formule pour $k_1 = k_2$.
3. Soit $A$ une matrice bande de largeur $k_1 = k_2 = r$. On suppose que $A$ admet une décomposition LU $A = LU$. Montrer que $L$ est une matrice bande de largeurs $k_1 = r$ et $k_2 = 0$ et $U$ est une matrice bande de largeurs $k_1 = 0$ et $k_2 = r$.
4. Qu'en est-il si $k_1 \neq k_2 \leqslant r$ ?
5. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice bande de largeur $r$ et $S = B^*B$ sa factorisation de Cholesky. Montrer que $B$ est une matrice bande de largeur $k_1 = 0$ et $k_2 = r$.

**Exercice 4.** ***(Décomposition de*** Cholesky ***du laplacien discret)***
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ la matrice bande[*] définie par

$$a_{i,j} = \begin{cases} \phantom{-}2 & \text{si } i = j, \\ -1 & \text{si } |j-i| = 1, \\ \phantom{-}0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \text{i.e.} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Justifier l'existence et l'unicité de la décomposition LU de $A$.
2. Déterminer explicitement la décomposition LU sur $\mathbb{Q}$ de $A$.
3. En déduire la décomposition de Cholesky de $A$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 5.** Montrer que la décomposition QR induit une application $A \mapsto (Q, R)$ qui est continue sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

**Exercice 6.** ***(Matrices de*** Householder***)***
On appelle *matrice de Householder* la matrice d'une application linéaire $H_v$ de la forme $H_v(x) = x - 2\frac{\langle x,v\rangle}{\langle v,v\rangle}v$ pour un vecteur $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ fixé.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, il existe un vecteur $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que $H_v(x)$ a ses $n-1$ dernières coordonnées nulles.
   *Indication : interpréter tout ça géométriquement.*
2. Donner une formule explicite pour un tel $v$ et pour $H_v$.
3. En déduire que pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, il existe $k \leqslant n-1$ matrices de Householder $H_1, \ldots, H_k$ telles que $H_k \cdots H_1 A$ est triangulaire supérieure.
4. En déduire un algorithme pour calculer la décomposition QR qui n'utilise pas le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt et estimer son coût[†].

∗. On pourra reconnaître la matrice d'un Laplacien discret.
†. Numériquement, on admet, et on pourrait montrer que cet algorithme est meilleur que celui présenté en cours.