Feuille d'exercices n°12 : Conditionnement et valeurs singulières

Dans toute cette feuille K est un corps de caractéristique $\mathrm{car}(K) \neq 2$. On désignera par V un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et par q une forme quadratique sur V.

À faire

Exercice 1. ***(Valeurs singulières et norme)***
Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $s_1 \leqslant \cdots \leqslant s_r$ ses valeurs singulières rangées dans l'ordre croissant.

1. Montrer que $\|A\|_2 = s_r$ et que $\mathrm{tr}(A^*A) = \sum_{i=1}^{r} s_i^2$.
2. Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, montrer que $r = n$, que $s_1 > 0$ et que $\mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{s_n}{s_1}$.

Exercice 2. ***(Inversion d'une matrice et conditionnement)***
Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\delta A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A + \delta A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On pose $B = A^{-1}$ et $B + \delta B = (A + \delta A)^{-1}$. Démontrer que

$$\frac{\|\delta B\|}{\|B + \delta B\|} \leqslant \mathrm{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

et que, si $\|A^{-1}\delta A\| < 1$, alors

$$\frac{\|\delta B\|}{\|B\|} \leqslant \mathrm{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}(1 + O(\|\delta A\|).$$

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\delta b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\mathrm{cond}_1(A)$.
2. Résoudre $Ax = b$ et $A(x + \delta x) = b + \delta b$.
3. Calculer le facteur d'amplification de l'erreur, c'est-à-dire la quantité $\dfrac{|\delta x|_1}{|x|_1} \dfrac{|b|_1}{|\delta b|_1}$.

Exercice 4. ***(Conditionnement des matrices*** 2×2***)***
Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{K})$ une matrice quelconque.

1. Soit $t = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} |a_{i,j}|^2 = \mathrm{tr}(A^*A)$ et $d = |\det(A)|$. Montrer que $\mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{t + \sqrt{t^2 - 4d^2}}{2d}$.
2. On prend $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\delta A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On prend $b = (1, 2) \in \mathbb{K}^2$.
   (a) Résoudre directement les systèmes linéaires $Ax = b$ et $(A + \delta A)(x + \delta x) = b$.
   (b) Calculer les conditionnements $\mathrm{cond}_p(A)$ et $\mathrm{cond}_p(A + \delta A)$ pour $p \in \{1, 2, \infty\}$.
   (c) Que dire de δx ?
   (d) Calculer le conditionnement des matrices intermédiaires dans la résolution de $(A + \delta A)(x + \delta x) = b$ via un pivot de Gauss. Que remarque-t-on ?

Exercice 5. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\delta A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $b, \delta b \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. Soit x et $x + \delta x$ définis par $Ax = b$ et $(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$. On suppose que $\|A^{-1}\delta A\| < 1$. Montrer que

$$\frac{|\delta x|}{|x|} \leqslant \frac{\mathrm{cond}(A)}{1 - \|A^{-1}\delta A\|} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{|\delta b|}{|b|} \right)$$

Exercice 6. Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$ deux entiers et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ deux matrices rectangulaires. On définit la matrice carrée par blocs

$$M = \left(\begin{array}{c|c} XI_m & A \\ \hline B & XI_n \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{K}(X))$$

1. Montrer que $X^n \det(M) = X^m \chi_{BA}(X^2)$.
   Indication : On pourra chercher une matrice triangulaire inférieure L telle que LM est triangulaire supérieure par blocs.
2. Trouver une formule analogue pour BA.
3. En déduire que $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(AB) \cup \{0\} = \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(BA) \cup \{0\}$.
4. Conclure que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, les matrice A et A^* ont mêmes valeurs singulières.

Exercice 7. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $U^*AV = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_r, 0, \ldots, 0)$ une décomposition en valeurs singulières de A. On note respectivement u_i et v_i la i-ème colonne de U et V vue comme vecteur de $\mathbb{K}^m$ et $\mathbb{K}^n$ respectivement.

1. Montrer que $\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_r)$ et $\ker(A) = \mathrm{Vect}(v_{r+1}, \ldots, v_n)$.
2. Montrer que $\mathrm{im}(A^*) = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_r)$ et $\ker(A^*) = \mathrm{Vect}(u_{r+1}, \ldots, u_m)$.
3. Déterminer, à partir de U et V, les matrices des projections orthogonales sur $\mathrm{im}(A)$, $\ker(A)$, $\mathrm{im}(A^*)$ et $\ker(A^*)$.
4. Calculer la décomposition en valeurs singulières de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et les projections orthogonales de la question précédente.

Problème

Exercice 8. ***(Pseudo-inverse d'une matrice rectangulaire)***
Si $D \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est une matrice rectangulaire dont les r premiers coefficients diagonaux sont non nuls et sont les seuls, on définit la matrice pseudo-inverse $D^\dagger$ comme suit :

$$D = \left(\begin{array}{ccc|c} d_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & d_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \qquad D^\dagger = \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{d_1} & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \frac{1}{d_r} & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$$

On appelle pseudo-inverse d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ la matrice $A^\dagger$ donnée par $A^\dagger = VD^\dagger U^*$ où $U^*AV = D = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_r, 0, \ldots)$ est une décomposition de A en valeur singulières.

1. On suppose A diagonale dans cette question. Soit U^*DV une décomposition en valeurs singulière de A. Montrer que les deux définitions, coïncident, c'est-à-dire que $A^\dagger = \mathrm{diag}(\frac{1}{a_{1,1}}, \ldots, \frac{1}{a_{r,r}}, 0, \ldots) = VD^\dagger U^*$ indépendamment de U et V.
2. En déduire que, pour $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, la pseudo-inverse $A^\dagger$ ne dépend pas de la décomposition en valeurs singulières de A choisie.
3. Montrer que si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $A^\dagger = A^{-1}$.
4. Montrer que $A^\dagger = \sum_{i=1}^r \frac{1}{s_i} v_i u_i^*$ où u_i, v_i sont respectivement la i-ème colonne de U et V.
5. Montrer que $AA^\dagger$ est la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{im}(A)$.
6. Montrer que $A^\dagger A$ est la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{im}(A^*)$.
7. Montrer que la restriction à $\mathrm{im}(A^*) = (\ker A)^\perp$ de A^*A est une matrice inversible et $(A^*A)^{-1} = \displaystyle\sum_{i=1}^r \frac{1}{s_i^2} v_i v_i^*$.