

FEUILLE D'EXERCICES N°13 : ANNEAUX

Dans toute cette feuille K est un corps et A est un anneau commutatif unitaire.

À faire

Exercice 1. Trouvez les éléments inversibles, irréductibles, premiers, diviseurs de 0, nilpotents, idempotents des anneaux suivants :

$$K \qquad \mathbb{Z}[X] \qquad \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \qquad \mathcal{M}_2(K)$$

Exercice 2.

1. Soit I un idéal de A . Montrer que :
 - (a) I est premier $\iff A/I$ est intègre.
 - (b) I est maximal $\iff A/I$ est un corps.
2. On suppose A intègre. Soit $J = (a)$ un idéal principal de A engendré par $a \in A$. Montrer que :
 - (a) $J = (a)$ est un idéal premier $\iff a$ est un élément premier.
 - (b) $J = (a)$ est un idéal maximal parmi les idéaux propres principaux $\iff a$ est un élément irréductible.
 - (c) Qu'est-ce qui reste vrai si A n'est pas intègre?
Indication : on pourra chercher des contre-exemples dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
3. En déduire qu'un anneau est intègre (resp. un corps) si, et seulement si, 0 est premier (resp. maximal).

Exercice 3. Montrer qu'un anneau fini intègre est un corps.

Exercice 4. (Quotients d'un anneau)

Soient I, J deux idéaux de A .

1. Montrer que l'image réciproque d'un idéal par un morphisme d'anneaux est un idéal.
2. Décrire les idéaux de l'anneau A/I .
3. Parmi eux, lesquels sont premiers? maximaux?
4. Déterminer un isomorphisme naturel entre $A/(I+J)$ et un quotient de A/I .
5. Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Trouver une condition suffisante sur φ pour que l'image de tout idéal de A soit un idéal de B . Donner un contre-exemple lorsque celle-ci n'est pas satisfaite.

Exercice 5. (Double quotient d'un anneau)

1. Soient I, J deux idéaux de A . On note $\pi_I : A \rightarrow A/I$ et $\pi_J : A \rightarrow A/J$ les projections canoniques. Montrer que les anneaux $(A/I)/\pi_I(J)$ et $(A/J)/\pi_J(I)$ sont canoniquement isomorphes.
2. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire irréductible et α une racine de P dans \mathbb{C} . Donner un critère pour qu'un nombre premier p soit toujours premier dans $\mathbb{Z}[\alpha]$.
3. Pour un entier $n \geq 3$, montrer que 2 est toujours irréductible dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$.
4. En déduire que $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$ n'est pas factoriel.
Indication : on pourra distinguer les cas n pair et n impair.

Exercice 6. (Relations de Bézout explicites)

1. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Déterminer explicitement l'application réciproque $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$ de l'application canonique $\mathbb{Z}/35\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.
2. Déterminer toutes les racines carrées de -1 dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et de 2 dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. En déduire la liste des entiers dans \mathbb{Z} dont le carré est congru à 9 modulo 35.
3. Dans l'anneau euclidien $\mathbb{Z}[i]$, déterminer un PGCD et une relation de Bézout du couple $(3+i, 1+3i)$.

Exercice 7. (Stabilité des propriétés d'anneaux)

1. Montrer que l'anneau $A[X]$ est principal si, et seulement si, A est un corps.
2. Plus généralement, parmi les propriétés euclidien/principal/factoriel/noethérien, lesquelles sont stables par sous-anneau? anneau quotient?
3. Montrer qu'un anneau factoriel dans lequel tout couple de nombres premiers entre eux admet une relation de Bézout est principal.

Exercice 8.

1. Soit $u \in A^\times$ et $n \in A$ un élément nilpotent. Montrer que $u + n$ est inversible.
2. Décrire l'inverse de $1 - n$ lorsque n est nilpotent, puis calculer $8^{-1} \pmod{243}$.
3. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in A[X]$. Montrer que P est inversible si, et seulement si, a_0 est inversible et a_1, \dots, a_n sont nilpotents.

Exercice 9. (Morphismes d'anneaux)

1. Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux.
 - (a) Montrer que f induit un morphisme de groupes $f' : A^\times \rightarrow B^\times$.
 - (b) On suppose que f est surjective. À-t-on également f' surjective?
2. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$.
 - (a) Déterminer l'ensemble des morphismes de groupes, et d'anneaux $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
 - (b) Déterminer l'ensemble des morphismes de groupes, et d'anneaux $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$.

Exercice 10. (Éléments irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$)

1. Justifier que l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien.
2. Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$?
3. Montrer que tout élément irréductible de $\mathbb{Z}[i]$ divise dans $\mathbb{Z}[i]$ un élément irréductible de \mathbb{Z} .
4. Soit p un nombre premier dans \mathbb{Z} qui est réductible dans $\mathbb{Z}[i]$.
 - (a) Montrer que p est le produit de deux irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$ complexes conjugués l'un de l'autre.
 - (b) À quelle condition sont-ils associés dans $\mathbb{Z}[i]$?
5. Décrire les éléments irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 11. (Un exemple d'anneau ni factoriel, ni noethérien)

1. Montrer que pour un corps K quelconque, $K[X^2, X^3] \subset K[X]$ n'est pas factoriel malgré l'existence d'une décomposition en irréductibles. Que peut-on même remarquer sur cette décomposition en irréductibles?
2. Soit $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ l'anneau des fonctions entières sur \mathbb{C} (i.e. fonctions holomorphes définies sur \mathbb{C} entier).
 - (a) Montrer que $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ est intègre, et trouver ses inversibles.
 - (b) Montrer que les irréductibles de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ sont, à inversible près, les fonctions affines $z \mapsto z - z_0$ pour $z_0 \in \mathbb{C}$.
 - (c) En déduire que $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ n'est ni factoriel, ni noethérien.

Exercice 12. (Exemple d'équation de Mordell)

Dans cet exercice, on cherche à résoudre dans \mathbb{Z} l'équation de Mordell $y^2 = x^3 - 2$.

1. Rappeler pourquoi $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est factoriel.
2. Soit A un anneau factoriel et $a, b \in A$ premiers entre eux tels que $ab = c^n$ pour un certain $n \geq 1$, montrer qu'il existe $u, v \in A^\times$ et $\alpha, \beta \in A$ tels que $a = u\alpha^n$ et $b = v\beta^n$.
3. Soit (x, y) une solution de l'équation de Mordell. Montrer que $(y + i\sqrt{2})$ et $(y - i\sqrt{2})$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ et que ce sont des cubes dans cet anneau.
4. En écrivant explicitement le fait d'être un cube, en déduire que les seules solutions de l'équation dans \mathbb{Z} sont $(3, 5)$ et $(3, -5)$.

Problèmes

Exercice 13. (Un exemple d'anneau principal non euclidien)

On démontre d'abord le critère suivant de caractérisation de non-euclidiennité.

1. Soit A un anneau euclidien. Montrer qu'il existe un élément non inversible $x \in A$ tel que la restriction à $A^\times \cup \{0\}$ de la projection canonique $A \rightarrow A/(x)$ est surjective.

Soit $\alpha = \frac{1+i\sqrt{19}}{2} \in \mathbb{C}$ et $A = \mathbb{Z}[\alpha]$.

2. Calculer A^\times .
3. Montrer que A n'est pas euclidien.
4. Soient $a, b \in A \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe des éléments $q, r \in A$ tels que $r = 0$ ou $|r| < |b|$ choisis de sorte que $a = bq + r$ ou $2a = bq + r$.
5. Montrer que $A/(2)$ est un corps.
6. Montrer que A est principal.

Exercice 14. (Anneaux d'entiers quadratiques)

Soit $d \geq 2$ un entier sans facteur carré. On note \sqrt{d} un choix de racine carrée de d dans \mathbb{C} (imaginaire pur si $d < 0$) et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ et \mathcal{O}_K l'ensemble des entiers algébriques de K .

1. Si $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$, montrer que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.
2. Si $d \equiv 1 \pmod{4}$, montrer que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$ et trouver le polynôme minimal sur \mathbb{Z} de cet élément.
3. Supposons que $d < 0$. Montrer que $N : z \mapsto |z|^2$ est à valeurs entières sur \mathcal{O}_K , et que c'est un stathme euclidien sur \mathcal{O}_K si, et seulement si, $d \in \{-1, -2, -3, -7, -11\}$.
4. Trouver les inversibles de \mathcal{O}_K pour tout $d < 0$.
5. Déterminer les irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$, et en déduire quels nombres premiers s'écrivent comme somme de deux carrés d'entiers.
Indication : On pourra utiliser le fait que $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien.
6. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ a une infinité d'inversibles.

Pour aller plus loin

Exercice 15. (Radical d'un idéal)

1. Montrer que l'ensemble des éléments nilpotents de A forme un idéal de A .
2. Soit I un idéal de A . Soit $\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}; x^n \in I\}$. Montrer que \sqrt{I} est un idéal de A contenant I .
3. Décrire $\sqrt{(0)}$ et calculer $\sqrt{\sqrt{I}}$.
4. Décrire $\sqrt{(a)}$ dans $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ pour $a, b \in \mathbb{N}^*$.
5. Calculer $\sqrt{(X)}$ et $\sqrt{(X^3, Y)}$ dans $\mathbb{C}[X, Y]$.
6. Décrire l'image de \sqrt{I} dans A/I par la projection canonique.
7. Montrer que l'intersection de tous les idéaux premiers de A contenant I est \sqrt{I} .
Indication : montrer que si $x \notin \sqrt{I}$, alors l'ensemble des idéaux contenant I qui n'intersectent pas l'ensemble $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est non vide, puis que tout élément maximal de cet ensemble est un idéal premier de A .
8. Déterminer les éléments nilpotents de l'anneau $A/\sqrt{(0)}$.

Anneaux locaux

Un anneau est dit *local* s'il admet un unique idéal maximal.

Exercice 16.

1. Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est-il local ?
2. Tout sous-anneau d'un anneau local est-il un anneau local ?
3. Tout quotient d'un anneau local est-il un anneau local ?
4. Soit \mathfrak{m} un idéal maximal de A et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'anneau A/\mathfrak{m}^n est local.
5. Montrer que s'équivalent :
 - (i) l'anneau A est local ;
 - (ii) l'ensemble $A \setminus A^\times$ est un idéal de A ;
 - (iii) pour tous $a, b \in A$ tels que $a + b = 1$, on a $a \in A^\times$ ou $b \in A^\times$.
6. Si vous connaissez \mathbb{Z}_p , montrez que pour tout nombre premier $p \in \mathbb{N}$, l'anneau \mathbb{Z}_p est local.

Exercice 17. On appelle *série formelle* à coefficients dans K la donnée d'une suite dénombrable d'éléments de K . On note $K[[X]]$ l'ensemble des séries formelles à coefficients dans K .

1. Munir $K[[X]]$ d'une structure d'anneau commutatif pour laquelle il existe une injection naturelle de $K[X]$ dans $K[[X]]$.
2. Montrer que l'anneau $K[[X]]$ est intègre et que ses inversibles sont les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ telles que $x_0 \neq 0$.
3. Soit $K((X))$ le corps des fractions de $K[[X]]$. Montrer que les éléments de $K((X))$ sont les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ d'éléments de K pour lesquelles il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_n = 0$ pour tout $n < -n_0$.
4. Montrer que l'anneau $K[[X]]$ est local et préciser son idéal maximal.