ÉNS de Lyon — Cours d'algèbre
M2 FEADéP — 2019–2020

Feuille d'exercices n°16 : Polynômes en plusieurs indéterminées

Dans toute cette feuille A est un anneau commutatif, K est un corps et $n \in \mathbb{N}^*$.

À faire

Exercice 1. ***(Racines d'un polynôme)***
Soit A un anneau commutatif intègre et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient $P \in A[X]$ et $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de A deux à deux distincts. Soit $(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$.
   (a) Montrer que s'équivalent :
      (i) pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'élément a_i est racine d'ordre supérieur à m_i de P ;
      (ii) le polynôme $\prod_{i=1}^n (X - a_i)^{m_i}$ divise P.
   (b) En déduire que sous ces conditions que si $\deg(P) < \sum_{i=1}^n m_i$, alors $P = 0$.
2. Soit $P \in A[X_1, \ldots, X_n]$.
   (a) Soient $E_1, \ldots, E_n$ des parties infinies de A. Montrer que f_P est nulle sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ si, et seulement si, $P = 0$.
   (b) Montrer que si $A = \mathbb{R}$ et f_P est nulle sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, alors $P = 0$.

Exercice 2. ***(Décomposition en polynômes homogènes)***
Soit $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ qu'on écrit $P = \sum_{d \in \mathbb{N}} P_d$ avec $P_d \in K[X_1, \ldots, X_n]$ homogène de degré d [*].

1. Soit K un corps infini et $d \in \mathbb{N}$. Montrer que $P = P_d$ si, et seulement si, pour tout $\lambda \in K$ et tout $x \in K^n$, on a $P(\lambda x) = \lambda^d P(x)$. Donner un contre-exemple sur un corps fini.
2. Montrer que P est symétrique si, et seulement si, pour tout $d \in \mathbb{N}$, le polynôme P_d est symétrique.
3. Soit I un idéal de $K[X_1, \ldots, X_n]$. Montrer que s'équivalent :
   (i) l'idéal I est engendré par des polynômes homogènes ;
   (ii) $\forall P \in K[X_1, \ldots, X_n]$, on a $P \in I \Longrightarrow \forall d \in \mathbb{N},\ P_d \in I$;
   (iii) $\forall P \in K[X_1, \ldots, X_n]$, on a $P \in I \Longleftrightarrow \forall d \in \mathbb{N},\ P_d \in I$;
   (iv) l'idéal I est engendré par un nombre fini de polynômes homogènes.

Exercice 3. ***(Irréductibilité et polynômes homogènes)***
Soit $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme homogène.

1. Montrer que si $P = QR$ avec $Q, R \in K[X_1, \ldots, X_n]$, alors les polynômes Q et R sont homogènes de degré inférieur à $\deg(P)$.
2. Montrer que $X_1^2 + \cdots + X_n^2$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ si, et seulement si, $n \geq 2$.
3. Montrer que $X_1^2 + \cdots + X_n^2$ est irréductible dans $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ si, et seulement si, $n \geq 3$.
4. Montrer que les polynômes homogènes irréductibles de $\mathbb{C}[X, Y]$ sont exactement les polynômes homogènes de degré 1.

Exercice 4. ***(Polynômes antisymétriques)***
Soit A un anneau intègre de caractéristique $\mathrm{car}(A) \neq 2$ et $P \in A[X_1, \ldots, X_n]$. On rappelle que P est dit *antisymétrique* si $\sigma \cdot P = P(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) P$.

1. Montrer que $\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_j - X_i)$ est antisymétrique.
2. Montrer que tout polynôme antisymétrique s'écrit $P = \Delta Q$ avec Q symétrique.
3. Soit $P = \det \in A[Y_{i,j}]$ et $a_{i,j} = X_i^{j-1} \in A[X_1, \ldots, X_n]$. Montrer que $P\left(a_{i,j}\right) \in A[X_1, \ldots, X_n]$ est antisymétrique et, en fait, qu'il est égal à Δ.
4. Qu'advient-il lorsque $\mathrm{car}(A) = 2$?

[*]. Par convention, 0 est un polynôme homogène de degré d pour tout $d \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. ***(Polynômes invariants par le groupe alterné)***
Soit $n \geq 2$. Soit K un corps de caractéristique $\mathrm{car}(K) \neq 2$ et $P \in K[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme invariant sous l'action de $\mathfrak{A}_n$, c'est-à-dire que $\sigma \cdot P = P$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{A}_n$.

1. Montrer que l'application $\sigma \mapsto \sigma \cdot P$ ne prend que deux valeurs lorsque σ parcourt $\mathfrak{S}_n$.
2. Montrer que P s'écrit de manière unique sous la forme $P = S + \Delta T$ avec S, T symétriques.
3. Montrer que le sous-anneau $K[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{A}_n}$ de $K[X_1, \dots, X_n]$ formé par les polynômes P invariants sous l'action de $\mathfrak{A}_n$ est isomorphe à un quotient d'anneaux de polynômes que l'on explicitera.

Exercice 6. ***(Quelques polynômes symétriques)***

1. Expliciter Σ_i^n pour $0 \leq i \leq n \leq 4$.
2. Combien de monômes non nuls constituent le polynôme Σ_k^n et quels sont leurs coefficients ?
3. Montrer que $P = X_1^3 + X_2^3 + X_3^3$ est symétrique et l'écrire comme un polynôme en les polynômes symétriques élémentaires.

Exercice 7. ***(Corps des fractions rationnelles symétriques)***

1. Vérifier que l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $K[X_1, \dots, X_n]$ s'étend naturellement en une action sur $K(X_1, \dots, X_n)$.
2. Soit $F = \frac{A}{B} \in K(X_1, \dots, X_n) \setminus \{0\}$ une fraction rationnelle, avec $A, B \in K[X_1, \dots, X_n]$ premiers entre eux, telle que $\sigma \cdot F = F$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
   (a) Montrer qu'il existe un caractère $\chi : \mathfrak{S}_n \to K^\times$ tel que $A^\sigma = \chi(\sigma)A$ et $B^\sigma = \chi(\sigma)B$.
   (b) En déduire que A et B sont symétriques.
3. En déduire que $K(X_1, \dots, X_n)^{\mathfrak{S}_n} = K(\Sigma_1^n, \dots, \Sigma_n^n)$.

Exercice 8. ***(Une démonstration algébrique du théorème de D'Alembert-Gauss)***
On se propose de montrer que $\mathbb{C}$ est un corps algébriquement clos.

1. Montrer qu'un polynôme à coefficients complexes de degré 2 admet toujours une racine complexe.
2. Montrer qu'il suffit de montrer que tout polynôme non constant à coefficients réels admet une racine complexe.
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant. On procède par récurrence sur la valuation 2-adique de $d = \deg P$ pour montrer que P admet une racine complexe.
   (a) Montrer que si d est impair, alors P admet une racine complexe.

   On suppose désormais $v_2(d) \geq 1$ et que tous les polynômes réels dont le degré est de valuation 2-adique inférieure ou égale à $v_2(d) - 1$ ont au moins une racine complexe. Soit L un corps de décomposition de P sur $\mathbb{C}$. On note $(x_i)_{1 \leq i \leq d}$ les racines (avec répétitions en cas de racines multiples) de P sur L. Pour tout paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, tous entiers $1 \leq i < j \leq d$, on pose $f_{i,j}(\lambda) = x_i + x_j + \lambda x_i x_j$ et on définit un polynôme $S_\lambda = \prod_{1 \leq i < j \leq d} (X - f_{i,j}(\lambda)) \in L[X]$.

   (b) Montrer que $S_\lambda \in \mathbb{R}[X]$ et que $v_2(\deg(S_\lambda)) < v_2(d)$.
   (c) Montrer qu'il existe un couple (i, j) et deux paramètres $\lambda \neq \mu \in \mathbb{R}$ tels que $f_{i,j}(\lambda), f_{i,j}(\mu) \in \mathbb{C}$.
   (d) En déduire que $x_i + x_j \in \mathbb{C}$ et $x_i x_j \in \mathbb{C}$.
4. Conclure.

Exercice 9. ***(Sommes de Newton)***
Pour $k \geqslant 1$, on pose $S_k = \sum_{i=1}^n X_i^k$.

1. Soit $P = \prod_{i=1}^n (T - X_i) \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n][T]$.
   (a) En évaluant $TP'(T)$ de deux façons différentes, montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :
   $$(-1)^k k \Sigma_k^n + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \Sigma_i^n S_{k-i} = 0.$$
   (b) Pour tout $k > n$, en évaluant $T^{k-n}P(T)$ en X_i, montrer que :
   $$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \Sigma_i^n S_{k-i} = 0.$$
2. Montrer que les $(S_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont algébriquement indépendants sur K si, et seulement si, $\mathrm{car}(K) = 0$ ou $\mathrm{car}(K) > n$.
3. Sous cette condition, montrer que $K[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n} = K[S_1, \dots, S_n]$.

Problèmes

Exercice 10. ***(Théorème de Mason)***
Soient $A, B, C \in \mathbb{C}[X]$ trois polynômes.

1. On suppose que A, B, C sont non constants, premiers entre eux dans leur ensemble et tels que $A + B = C$. Soit m le nombre de racines distinctes de ABC.
   (a) Montrer que $A\left(\frac{A'}{A} - \frac{C'}{C}\right) = B\left(\frac{C'}{C} - \frac{B'}{B}\right)$.
   (b) En déduire que $\max(\deg(A), \deg(B), \deg(C)) < m$.
2. Soit $n \geq 3$.
   (a) Montrer que si $A^n + B^n = C^n$ et au moins l'un des trois polynômes A, B, C est non constant, alors il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(A, B, C) = \mathbb{C}P$.
   (b) En déduire que $\mathbb{C}(T)$ et $\mathrm{Frac}(\mathbb{C}[X, Y]/(X^n + Y^n - 1))$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 11. ***(Fonctions polynomiales)***
Soit A un anneau commutatif.

1. Montrer que A est un corps fini si, et seulement si, toute fonction $A \to A$ est polynômiale.
2. Généraliser aux fonctions $A^n \to A$.

Exercice 12. ***(Théorème de Chevalley-Warning)***
Soit κ un corps fini de caractéristique p et de cardinal q.

1. Montrer que pour tout polynôme $Q \in \kappa[X_1, \ldots, X_n]$, si $N(Q)$ compte le nombre de 0 de f_Q dans κ^n, alors :
$$\sum_{x \in \kappa^n} (f_Q(x))^{q-1} \equiv -N(Q) \mod p.$$
2. Montrer que si $P \in \kappa[X_1, \ldots, X_n]$ est un polynôme homogène de degré $d \in [\![1, n-1]\!]$, alors il existe $x \in \kappa^n \setminus \{0\}$ tel que $f_P(x) = 0$.
   Indication : on pourra observer que $f_P(0) = 0$ et que $\kappa^\times$ est cyclique.

Exercice 13. ***(Un produit scalaire sur l'algèbre des polynômes)***
Soit $A = K[X_1, \ldots, X_n]$ et $B = \mathrm{End}_K(A)$. Pour tout $i \in [\![1, n\mathbb{N}$, on définit $\partial_i = \frac{\partial}{\partial X_i} \in B$ l'opérateur de dérivation des polynômes par rapport à X_i. On note $\partial = (\partial_1, \ldots, \partial_n) \in B^n$.

1. Justifier l'existence et l'unicité d'un morphisme de K-algèbres $\begin{array}{ccc} A & \to & B \\ P & \mapsto & P(\partial) \end{array}$ vérifiant $X_i \mapsto \partial_i$.
2. Montrer que pour tous $P, Q \in A$, on a $(PQ)(\partial) = P(\partial) \circ Q(\partial)$.

Pour tous $P, Q \in A$, on pose $\langle P, Q \rangle = P(\partial)Q(0, \ldots, 0)$.

3. Montrer que pour tous $P, Q, R \in A$, on a $\langle PQ, R \rangle = \langle Q, P(\partial)R \rangle$.
4. Montrer que si $K = \mathbb{R}$, alors $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur la $\mathbb{R}$-algèbre A invariant sous l'action de $\mathfrak{S}_n$.
5. Calculer $\langle \Delta, \Delta \rangle$.

Exercice 14. ***(Théorème de Kronecker)***
On suppose que t

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe de module 1 qui n'est pas une racine de l'unité. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $|z^n - 1| < \varepsilon$.
2. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme de degré d à coefficient entier et $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ ses racines, avec multiplicité, dans $\mathbb{C}$. On suppose que pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, on a $0 < |\alpha_i| \leq 1$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre complexe $z_n = \prod_{i=1}^d (\alpha_i^n - 1)$ est entier.
   (b) Montrer que pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, on a $|\alpha_i| = 1$.
   (c) En déduire que les racines de P sont des racines de l'unité.

Pour aller plus loin

Exercice 15. ***(Le Nullstellensatz, ou presque)***
Soit K un corps algébriquement clos, donc infini, et $A = K[X_1, \dots, X_n]$. Pour tout idéal I de A, on note $\mathcal{V}(I) = \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n,\ \forall P \in I,\ P(x_1, \dots, x_n) = 0\}$ et $\sqrt{I} = \{Q \in A,\ \exists m \in \mathbb{N},\ Q^m \in I\}$. Pour toute partie $X \subset K^n$, on note $\mathcal{J}(X) = \{P \in A,\ \forall x \in X,\ P(x) = 0\}$.

1. Montrer que pour tout $X \subset K^n$, l'ensemble $\mathcal{J}(X)$ est un idéal de A et que $X \subset \mathcal{V}(\mathcal{J}(X))$.
2. Montrer que pour tout idéal I de A, on a $\sqrt{I} \subset \mathcal{J}(\mathcal{V}(I))$.
3. Soit I un idéal de A et $P \in \mathcal{J}(\mathcal{V}(I))$. Soit $R_P = K[X_1, \dots, X_n, T]/(1-TP)$. Montrer que $IR_P = R_P$.
4. En déduire que pour tout idéal I de A, on a $\sqrt{I} = \mathcal{J}(\mathcal{V}(I))$.
5. Soit L/K une extension de corps qui admet une K-base dénombrable. Montrer que $L = K$.
6. En déduire que pour tout idéal propre $\mathfrak{m}$ de A, on a $\mathcal{V}(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$.
   Indication : on pourra se ramener au cas où $\mathfrak{m}$ *est un idéal maximal.*
7. Montrer que l'ensemble des $\mathcal{V}(I)$ pour I idéal de A constitue un ensemble de fermés pour une certaine topologie, appelée *topologie de Zariski*, sur K^n et que pour tout $X \subset K^n$, l'ensemble $\mathcal{V}(\mathcal{J}(X))$ est l'adhérence de X dans K^n pour cette topologie.
8. Montrer que les résultats précédents sont faux si $K = \mathbb{R}$.