Feuille d'exercices n°17 : Exponentielle de matrices et applications.

Dans toute cette feuille, on se donne $n \in \mathbb{N}^*$ un entier.

À faire

Exercice 1.

1. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $P_A \in \mathbb{C}[X]$ de degré $\leq n-1$ tel que $\exp(A) = P_A(A)$.
2. Dans le cas où A est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, donner explicitement un polynôme P_A qui convient et en déduire une façon de calculer $\exp(A)$.
3. Donner une valeur explicite pour P_A quand A est nilpotente.
4. Montrer qu'il n'existe pas de $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on ait $P(A) = \exp A$.

Exercice 2.

1. Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'exponentielle de $\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$.
2. En déduire des matrices réelles non nulles dont l'exponentielle est l'identité.
3. Montrer que exp induit une surjection de l'ensemble des matrices antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. *Indication : on pourra commencer par* $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Soit A une matrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de valeurs propres a et b.

1. Montrer que si $a \neq b$, alors $\exp(A) = \frac{ae^b - be^a}{a-b} I_2 + \frac{e^a - e^b}{a-b} A$.
2. Trouver une formule dans le cas où $a = b$.

Exercice 4. On considère l'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que cette application est surjective.
   Indication : On pourra montrer que pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$*, il existe un polynôme* $P_A \in \mathbb{C}[X]$ *tel que* $A = \exp(P_A(A))$.
2. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'application $A \mapsto A^k$ est surjective.
3. Montrer que $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est $\mathcal{C}^\infty$ et donner sa différentielle en 0.
4. En déduire que pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, le groupe topologique $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ n'a pas de sous-groupe arbitrairement petit, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de I_n dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ne contenant aucun sous-groupe non trivial.

Exercice 5. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A et B commutent si, et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\exp(t(A+B)) = \exp(tA)\exp(tB)$.

Exercice 6.

1. Montrer que pour toute fonction dérivable $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, les matrices $A'(t)$ et $A(t)$ commutent, on a
$$(\exp A(t))' = A'(t) \exp A(t).$$
2. Montrer que cette égalité n'est pas vérifiée en général, par exemple $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7. On désigne par $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \|A - I_n\| < 1\}$ la boule ouverte de rayon 1 centrée en I_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour toute matrice $A \in \mathcal{B}$, on définit le logarithme de A par :

$$\log(A) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{(A - I_n)^k}{k}.$$

1. Montrer que cette série converge uniformément sur tout compact de $\mathcal{B}$.
2. En déduire que log définit une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur le domaine $\mathcal{B}$.
3. Montrer que l'exponentielle et le logarithme sont inverses l'une de l'autre lorsqu'elles sont toutes les deux définies.
4. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices quelconques. Montrer que :
   (a) $\lim\limits_{N\to\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{N}\right)\exp\left(\frac{B}{N}\right)\right)^N = \exp(A+B)$;
   (b) $\lim\limits_{N\to\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{N}\right)\exp\left(\frac{B}{N}\right)\exp\left(-\frac{A}{N}\right)\exp\left(-\frac{B}{N}\right)\right)^{N^2} = \exp(AB-BA)$.

Problèmes

Exercice 8. ***(Exponentielle de matrices et matrices symétriques)***
1. Montrer que l'exponentielle induit une application continue $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que cette application est surjective, puis qu'elle est injective.
3. Montrer que l'image réciproque d'un compact par cette application est un compact.
4. En déduire que $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.
5. Montrer l'application exp induit un difféomorphisme de l'espace des matrices hermitiennes vers l'espace des matrices hermitiennes définies positives.
6. En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est difféomorphe à $\mathcal{U}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{n^2}$.

Exercice 9. ***(Différentielle de l'exponentielle de matrices)***
Le but de cet exercice est de calculer la différentielle de la fonction exponentielle. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\operatorname{ad} A$ l'application linéaire $M_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donnée par $(\operatorname{ad} A)(X) = AX - XA$.
1. Montrer que pour tout $A, H \in M_n(\mathbb{C})$ on a $\exp(A)H\exp(-A) = \exp(\operatorname{ad} A)H$.
   Indication : on pourra considérer $f(t) = \exp(tA)H\exp(-tA)$.
2. Posons $g(t,u) = \exp(-tA)\exp\big(t(A+uH)\big)$ pour $t, u \in \mathbb{R}$, et $h(t) = \frac{\partial g}{\partial u}(t,0)$. Montrer que $h(0) = 0$ et $h'(t) = \exp(-t\operatorname{ad} A)H$, en déduire une expression pour $h(t)$.
3. Déduire des questions précédentes que $D\exp_A(H) = (\exp A)\sum_{k\geq 0} \frac{(-\operatorname{ad} A)^k}{(k+1)!}H$.

Pour aller plus loin

Dans la suite, on se fixe un entier $n \geq 1$, et on considère les sous-groupes de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ suivants :
— $\mathbb{D}_n(\mathbb{R})$ le sous-groupe des matrices diagonales ;
— $\mathbb{T}_n(\mathbb{R})$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures ;
— $\mathbb{U}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices triangulaires supérieures ayant des 1 sur la diagonale ;
— $K = \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$;
— $A = \mathbb{D}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$;
— N le groupe des matrices monomiales, c'est-à-dire qui ont exactement un coefficient non nul sur chaque ligne et colonne ;
— $W = N/\mathbb{D}_n(\mathbb{R})$ isomorphe au groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 10. ***(Décomposition de Cartan)***
Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = KAK$.

Exercice 11. ***(Décomposition d'Iwasawa)***
1. Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ s'écrit $A = {}^tBB$ avec $B \in \mathbb{T}_n(\mathbb{R})$.
   Indication : on peut procéder par orthonormalisation de Gram-Schmidt.
2. Montrer qu'on a un homéomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} K \times A \times \mathbb{U}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \\ (k,a,n) & \mapsto & kan \end{array}$$

Exercice 12. ***(Décomposition de Bruhat)***
Réfléchir à la décomposition suivante :

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{U}_n(\mathbb{R})W\mathbb{T}_n(\mathbb{R})$$