

## FEUILLE D'EXERCICES N°18 : FORMES QUADRATIQUES GÉNÉRALES

Dans toute cette feuille  $K$  est un corps de caractéristique  $\text{car}(K) \neq 2$ . On désignera par  $V$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$  et par  $q$  une forme quadratique sur  $V$ .

### À faire

#### Exercice 1. (*Identité du parallélogramme*)

1. Montrer que toute forme quadratique  $q$  sur le  $K$ -espace vectoriel  $V$  vérifie l'identité du parallélogramme

$$q(x+y) + q(x-y) = 2(q(x) + q(y)).$$

Pourquoi l'appelle-t-on ainsi ?

2. Montrer que si  $K = \mathbb{C}$ , il existe des fonctions vérifiant cette identité sans être des formes quadratiques.

Supposons maintenant que le corps de base est  $K = \mathbb{R}$ , et soit  $q : V \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue vérifiant l'identité du parallélogramme. On définit une fonction  $b$  sur  $V \times V$  par  $b(x, y) = \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2}$ .

3. Avec trois applications de l'identité du parallélogramme, montrer que  $b$  est additive à droite, puis à gauche.
4. En déduire que  $b$  est bilinéaire symétrique et donc que  $q$  est une forme quadratique.

*Indication : on pourra utiliser la densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ .*

#### Exercice 2. (*Par 5 points passe une quadrique*)

Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension 3 et  $\mathcal{Q}(V)$  l'ensemble des formes quadratiques sur  $V$ . Soit  $x_1, \dots, x_5 \in V$ . Montrer qu'il existe  $q \in \mathcal{Q}(V) \setminus \{0\}$  telle que  $q(x_1) = \dots = q(x_5) = 0$ .

*Indication : on pourra commencer par déterminer la dimension de  $\mathcal{Q}(V)$ .*

#### Exercice 3. (*Orthogonalisation simultanée*)

Soient  $q$  et  $q'$  deux formes quadratiques sur un même espace  $V$ . On note respectivement  $f$  et  $f'$  leurs formes polaires. On suppose que  $q$  est non dégénérée.

1. Montrer qu'il existe un unique  $u \in \text{End}(V)$  tel que

$$f(u(x), y) = f'(x, y)$$

*Indication : que pouvez-vous dire de l'application linéaire  $\ell_f$  ?*

2. Montrer que les sous-espaces propres de  $u$ , c'est-à-dire les sous-espaces  $E_u(\lambda) = \ker(u - \lambda \text{id})$  pour  $\lambda \in \text{sp}(u)$ , sont en somme directe orthogonale pour  $q$ .
3. Montrer qu'ils sont aussi en somme directe orthogonale pour  $q'$ .
4. En déduire qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $V$  qui est à la fois  $q$ -orthogonale et  $q'$ -orthogonale si, et seulement si,  $u$  est diagonalisable.
5. Application : on suppose que  $k = \mathbb{R}$  et que  $q$  est définie positive. Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  qui est  $q$ -orthonormée (c'est-à-dire une base  $q$ -orthogonale telle que  $q(b) = 1 \forall b \in \mathcal{B}$ ) et  $q'$  orthogonale.

#### Exercice 4. (*Cône isotrope*)

On note  $C(q)$ , appelé *cône isotrope*, l'ensemble des vecteurs isotropes de  $q$ .

1. Montrer que  $C(q)$  est stable par multiplication scalaire et que  $\ker q \subset C(q)$ .
2. Si  $C(q) \neq \ker q$ , montrer que  $q$  est surjective dans  $K$ . Donner ensuite un contre-exemple avec  $q \neq 0$ .
3. Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $V$ . Montrer que si  $W \cap C(q) = \{0\}$ , alors  $W \oplus W^\perp = V$ .
4. Montrer que si  $C(q) \neq \{0\}$  et  $q$  est non dégénérée, alors  $\text{Vect}(C(q)) = V$ .

**Exercice 5.** On suppose que  $q$  est non dégénérée. Soient deux vecteurs anisotropes distincts  $x, y$  de  $V$  tels que  $q(x) = q(y)$ .

1. Montrer qu'il existe au plus une réflexion de  $V$  envoyant  $x$  sur  $y$ .
2. Montrer qu'il existe une réflexion ou une composée de deux réflexions envoyant  $x$  sur  $y$ .  
*Indication : on pourra montrer que  $x - y$  ou  $x + y$  est anisotrope.*
3. Décrire les orbites de  $V \setminus C(q)$  sous l'action de  $\mathcal{O}(q)$ .

**Exercice 6.** Soit  $\mathcal{Q}$  l'ensemble des formes quadratiques.

1. Montrer que  $\mathcal{Q}$  est un  $K$ -espace vectoriel et préciser sa dimension.
2. On suppose que  $K = \mathbb{R}$ .
  - (a) Montrer que l'ensemble  $\mathcal{Q}^+$  des formes quadratiques  $q$  positives (resp.  $\mathcal{Q}^{++}$  des formes quadratiques définies positives) est un convexe de  $\mathcal{Q}$ .
  - (b) Pour  $\mathcal{Q}^+$  et  $\mathcal{Q}^{++}$ , déterminer son adhérence dans  $\mathcal{Q}$ . Est-ce un ouvert de  $\mathcal{Q}$ ?

**Exercice 7. (Plans hyperboliques)**

On dit que  $W$  est un *plan hyperbolique* si  $\dim W = 2$  et qu'il existe une base  $(e_1, e_2)$  de  $W$ , appelée *base hyperbolique*, dans laquelle la matrice de  $q$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que, dans un plan hyperbolique, tout vecteur isotrope non nul se complète en une base hyperbolique.
2. Montrer que si  $V$  est de dimension 2, alors  $q$  est soit dégénérée, soit anisotrope, soit hyperbolique.
3. Montrer que si  $V$  de dimension supérieure à 2 et  $q$  est non dégénérée, si  $x \in V$  est isotrope, alors il est contenu dans un plan  $P$  tel que  $q|_P$  est hyperbolique.

**Exercice 8. (Calculs explicites)**

1. Décomposer suivant l'algorithme de Gauss les formes quadratiques suivantes :
  - (a)  $q(x, y, z) = xy + xz + yz$  sur  $\mathbb{Q}^3$ .
  - (b)  $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2) + xt + xz + zt$  sur  $\mathbb{Q}^4$ .
  - (c) La forme quadratique déterminant sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ .
2. Donner le rang de la forme quadratique  $M \mapsto \text{Tr}(M^2)$ .

**Exercice 9. (Applications de la réduction de Gauss)**

Supposons que  $q$  est une forme quadratique de la forme

$$q = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i^2,$$

avec  $f_1, \dots, f_n \in V^*$  linéairement indépendantes et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ .

Donner, pour  $q$  :

1. une expression de sa forme bilinéaire polarisée  $b_q$  ;
2. une base orthogonale de  $q$  ;
3. le noyau et le rang de  $q$  ;
4. le discriminant de  $q$ .