ÉNS de Lyon
M2 FEADéP

Cours d'algèbre
2019–2020

FEUILLE D'EXERCICES N°20 : CONIQUES ET QUADRIQUES

Dans toute cette feuille, les espaces vectoriels ou affines sont sur $\mathbb{R}$ et de dimension finie.

Sauf mention explicite du contraire, les coniques sont vues comme parties de $\mathbb{R}^2$ et les quadriques comme parties de $\mathbb{R}^3$.

À faire

Exercice 1. Quelle est la nature de la conique :

1. $x^2 - 2xy + y^2 + \lambda(x - y) = 0$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$;
2. $x^2 + xy + y^2 = 1$?

Exercice 2. ***(Construction bifocale d'une ellipse)***
Soient $F_1 = (-2, -1)$ et $F_2 = (2, 2)$ deux points de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M de $\mathbb{R}^2$ tels que $d(M, F_1) + d(M, F_2) = 6$.

1. Déterminer une équation de l'ensemble $\mathcal{E}$.
2. Déterminer la nature de la conique $\mathcal{E}$.
3. Déterminer une courbe paramétrée dont l'image est $\mathcal{E}$.
4. Dessiner $\mathcal{E}$.

Exercice 3. Soit $E = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}(M) = 0\}$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{N}$ des éléments nilpotents de l'anneau $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est contenu dans E.
2. Combien l'espace $E \setminus \mathcal{N}$ a-t-il de composantes connexes ?
   Indication : on pourra interpréter det *comme une forme quadratique réelle.*
3. Lesquelles correspondent à des matrices diagonalisables ?

Exercice 4. ***(Hyperboloïde à une nappe)***
On considère la quadrique H d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1. Déterminer la nature de H et faire un dessin.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $f_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $t \mapsto (\cos\theta - t\sin\theta, \sin\theta + t\cos\theta, t)$ a pour image une droite contenue dans H.
3. Montrer que H est une réunion de droites deux à deux disjointes.
4. Déterminer une autre famille de droites deux à deux disjointes dont la réunion est encore H.
5. Est-ce que tout hyperboloïde à une nappe est réunion de droites ?
6. Soit $\mathcal{D}$ une droite non coplanaire à (Oz) et non contenue dans un plan parallèle à (Oxy). Soit R_θ la rotation d'angle θ autour de l'axe (Oz). Montrer que $\bigcup_{\theta\in\mathbb{R}} R_\theta(\mathcal{D})$ est un hyperboloïde à une nappe.

Exercice 5. Déterminer la nature et dessiner les quadriques suivantes :

1. $x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1$;
2. $xy = 1$;
3. $x^2 + y^2 + 4z^2 = 6$;
4. $z - 4xy = 0$;
5. $z^2 - 4xy = 0$.

Exercice 6. Soit $\mathcal{C}$ la quadrique d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

1. Déterminer la nature de $\mathcal{C}$ et faire un dessin.
2. Déterminer, en fonction de m, la nature de la conique obtenue par intersection de $\mathcal{C}$ avec le plan d'équation $z = m$.
3. Déterminer, en fonction de a et m, la nature de la conique obtenue par intersection de $\mathcal{C}$ avec le plan d'équation $x + az = m$.
4. Quelles sont les coniques qu'on peut obtenir comme intersection d'un plan de $\mathbb{R}^3$ avec $\mathcal{C}$?

Problèmes

Exercice 7. ***(Ellipse de Steiner)***
On identifie $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$.

1. Montrer qu'il existe une ellipse tangente en les milieux des côtés du triangle de sommets a, b, c.
   Indication : Commencer par le cas d'un triangle équilatéral et effectuer une transformation affine.
2. Soient $u, v, w \in \mathbb{C}$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E} = \{\frac{1}{2}(ue^{i\theta} + ve^{-i\theta}),\ \theta \in \mathbb{R}\}$ est une ellipse.
3. Déterminer les foyers de $\mathcal{E}$.
4. Montrer que les racines de P' où $P = (X - a)(X - b)(X - c)$ sont les foyers de $\mathcal{E}$.

Exercice 8. ***(Par 5 points)***
Soit $\mathbb{A}$ un espace affine réel. Soient $X = \{A, B, C, D, E\}$ une partie de $\mathbb{A}$ à 5 éléments.

1. On suppose que $\dim(\mathbb{A}) = 2$ et que les points de X sont 4 à 4 non alignés.
   (a) Justifier l'existence d'une partie $\mathcal{R}$ de X qui constitue un repère affine de $\mathbb{A}$.
   (b) Rappeler la forme générale de l'équation en coordonnées barycentriques d'une conique $\mathcal{C}$ dans un repère affine $\mathcal{R}$.
   (c) En exprimant également les points de $X \setminus \mathcal{R}$ en coordonnées barycentriques, déterminer un système d'équations vérifiant $X \subset \mathcal{C}$.
   (d) Démontrer que ce système d'équations est de rang 1.
   (e) En déduire qu'il existe une unique conique $\mathcal{C}$ contenant X.
2. On suppose que $\dim(\mathbb{A}) = 3$. Soit $\mathcal{Q}$ l'espace des formes quadratiques sur $\overrightarrow{\mathbb{A}}$.
   (a) Justifier que pour $x \in \overrightarrow{\mathbb{A}}$, l'application $\mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ définie par $q \mapsto q(x)$ est $\mathbb{R}$-linéaire.
   (b) En déduire qu'il existe toujours une quadrique passant par X.
   (c) À quelle(s) condition(s) cette quadrique est-elle unique ?

Exercice 9. ***(Ellipsoïde de John-Loewner)***
Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $V = \mathbb{R}^d$. Soit $\mathcal{Q}$ l'espace vectoriel des formes quadratiques sur V. On note $\mathcal{Q}^+$ (resp. $\mathcal{Q}^{++}$) le sous-ensemble des formes quadratiques positives (resp. définies positives). Pour $q \in \mathcal{Q}$, on notera $\mathcal{E}_q = \{x \in V,\ q(x) \leqslant 1\}$. Soit K un compact de V. On note $\mathcal{A}(K) = \{q \in \mathcal{Q}^+,\ \mathcal{E}_q \supset K\}$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est non vide et convexe.
2. Montrer que $N(q) = \sup_{|x| \leqslant 1} |q(x)|$ définit une norme sur $\mathcal{Q}$.
3. Montrer que $\mathcal{A}$ est fermé pour N.
4. On suppose que K est d'intérieur non-vide. Montrer que $\mathcal{A}$ est borné pour N.
5. Montrer que l'application $q \mapsto \det(q)$ admet un unique maximum sur $\mathcal{A}(K)$ lorsque K est d'intérieur non-vide.
6. En déduire que pour tout sous-groupe compact G de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ il existe une unique forme quadratique $q \in \mathcal{Q}^{++}$ maximisant det et telle que G est un sous-groupe de $\mathcal{O}(q)$.
7. Justifier le titre de l'exercice et faire un dessin.