Feuille d'exercices n°2 : Polynômes d'endomorphismes, réduction, décompositions.

Dans toute cette feuille on fixe un corps K, et tous les espaces vectoriels considérés sont sur K et de dimension finie.

À faire

Polynômes d'endomorphismes et sous-espaces stables

Pour $\lambda \in K$ et $u \in \mathrm{End}(E)$, on note $E'_u(\lambda) = \cup_{k\geq 0} \ker(u - \lambda\,\mathrm{id})^k$ le sous-espace caractéristique associé à λ et $E_u(\lambda) = \ker(u - \lambda\,\mathrm{id})$ le sous-espace propre associé à λ. On note également χ_u le polynôme caractéristique de u et μ_u le polynôme minimal de u.

Exercice 1. Soit $P, Q \in K[X]$ deux polynômes. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathrm{End}(E)$.

1. Montrer que $\ker \mathrm{pgcd}(P,Q)(u) = \ker P(u) \cap \ker Q(u)$ et que $\mathrm{Im}\, \mathrm{pgcd}(P,Q) = \mathrm{Im}\, P(u) + \mathrm{Im}\, Q(u)$.
2. Montrer que $\ker \mathrm{ppcm}(P,Q)(u) = \ker P(u) + \ker Q(u)$ et que $\mathrm{Im}\, \mathrm{ppcm}(P,Q) = \mathrm{Im}\, P(u) \cap \mathrm{Im}\, Q(u)$.
3. Rappeler et démontrer le lemme des noyaux.

Exercice 2. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathrm{End}(E)$. Soit F un sous-espace stable par u.

1. On suppose que F admet un supplémentaire G stable par u. Montrer que $\mu_u = \mathrm{ppcm}(\mu_{u_F}, \mu_{u_G})$.
2. Montrer que $\mathrm{ppcm}(\mu_{u_F}, \mu_{u_{E/F}}) \,\Big|\, \mu_u \,\Big|\, \mathrm{ppcm}(\mu_{u_F}, \mu_{u_{E/F}})^2$.

Exercice 3. Montrer l'équivalence entre :

(i) $\chi_u(\lambda) = 0$

(ii) $E_u(\lambda) \neq \{0\}$

(iii) $E'_u(\lambda) \neq \{0\}$

Exercice 4.

1. Montrer que chaque $E'_u(\lambda)$ et $E_u(\lambda)$ est un sous-espace stable de u.
2. Montrer que si v commute à u, alors v stabilise les $E'_u(\lambda)$ et $E_u(\lambda)$, ainsi que $\mathrm{im}\, u$.
3. Trouver deux endomorphismes u et v qui commutent pour lesquels il existe un sous-espace stable par u qui n'est pas stable par v.
4. Soit v un polynôme en u. Montrer que tout sous-espace stable par u est stable par v.

Exercice 5.

1. Montrer que les $E'_u(\lambda)$ sont en somme directe, ainsi que les $E_u(\lambda)$.
2. Montrer, sans utiliser χ_u, que le nombre de $\lambda \in K$ tels que $E'_u(\lambda) \neq \{0\}$ est inférieur à $\dim E$.

Exercice 6. Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. La **matrice compagnon** de P, carrée de taille n, est définie par :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de C_P est exactement P.
2. Montrer que le polynôme minimal de C_P est également P.
3. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton, à savoir $\chi_u(u) = 0$.
4. Montrer que C_P est inversible si, et seulement si, $P(0) \neq 0$. Donner une expression de C_P^{-1} dans ce cas.

Diagonalisation des endomorphismes

Exercice 7. ***(Critères de diagonalisation)***

1. Montrer l'équivalence entre :
   (i) $E = \oplus_\lambda E_u(\lambda)$;
   (ii) u est annulé par un polynôme scindé à racines simples ;
   (iii) μ_u est scindé à racines simples ;
   (iv) E admet une base formée de vecteurs propres pour u ;
   (v) u est *diagonalisable*, c'est-à-dire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.
2. Montrer que si u est diagonalisable et si F est un sous-espace stable par u, alors u_F et $u_{E/F}$ sont diagonalisables.

Exercice 8.

1. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que tout élément de G est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des racines de l'unité.
2. Trouver un exemple de corps K (algébriquement clos si possible) pour lequel cette propriété n'est plus vérifiée.

Exercice 9. Dans cet exercice $K = \mathbb{C}$. Montrer que si u est diagonalisable, alors u a au moins une racine carrée. Si les valeurs propres de u sont distinctes et non nulles, montrer que u a exactement $2^{\dim E}$ racines carrées.

Endomorphismes trigonalisables

Exercice 10. ***(Critères de trigonalisation)***

1. Montrer que toute racine de μ_u est une valeur propre de u, et donc une racine de χ_u.
2. Montrer que toute valeur propre de u est racine de μ_u.
3. Montrer l'équivalence entre :
   (i) $E = \oplus_\lambda E'_u(\lambda)$;
   (ii) u est annulé par un polynôme scindé ;
   (iii) μ_u est scindé ;
   (iv) χ_u est scindé ;
   (v) u est trigonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.
4. On suppose que les conditions précédentes sont vérifiées. Montrer que pour tout $\lambda \in K$, le projecteur π_λ sur $E'_u(\lambda)$ parallèlement à $\oplus_{\mu\neq\lambda} E'_u(\mu)$ est un polynôme en u.
5. On suppose que u est trigonalisable et que F est stable par u. Montrer qu'alors $F = \oplus_\lambda(F \cap E'_u(\lambda))$.

Exercice 11.

1. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille commutative d'endomorphismes diagonalisables.
   (a) Montrer qu'ils sont codiagonalisables, c'est-à-dire qu'il existe une base formée de vecteurs propres pour chacun des u_i.
   (b) En déduire si u et v sont diagonalisables et commutent, alors $u + v$ est diagonalisable.
2. Soit (u_i) une famille commutative d'endomorphismes trigonalisables.
   (a) Montrer qu'ils sont cotrigonalisables, c'est-à-dire qu'il existe une base dans laquelle la matrice de chacun des u_i est triangulaire supérieure.
   (b) En déduire que, si u et v sont trigonalisables et commutent, alors $u + v$ est trigonalisable.
3. Trouver deux matrices simultanément trigonalisables mais qui ne commutent pas.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier. Soient $M_1, \dots, M_n \in \mathcal{M}_n(K)$ des matrices nilpotentes qui commutent deux à deux. Montrer que le produit des n matrices $M_1 \cdot \cdots \cdot M_n$ est égal à 0.

Exercice 12.

1. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u^t l'est.
2. Montrer que u est trigonalisable si et seulement si u^t l'est.

Endomorphismes nilpotents

Un endomorphisme est *nilpotent* s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$. Si u est nilpotent, on dit que u est nilpotent *d'indice* m si $u^m = 0$ et $u^{m-1} \neq 0$.

Exercice 13. Soit $u \in \operatorname{End}(E)$ un endomorphisme quelconque.

1. Soit $x \in E$ tel que $u^m(x) = 0$ et $u^{m-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $(x, u(x), \ldots, u^{m-1}(x))$ est libre.
2. Montrer que tout endomorphisme nilpotent est d'indice inférieur à $\dim E$.
3. Montrer $E'_u(\lambda) = \ker(u - \lambda \operatorname{id})^{\dim E}$ pour tout λ.
4. Soit m_λ la multiplicité de la racine λ de χ_λ. Montrer que $\dim E'_u(\lambda) = m_\lambda$ et que $E'_u(\lambda) = \ker(u - \lambda \operatorname{id})^{m_\lambda}$.

Exercice 14. On suppose χ_u scindé.

1. On pose $d = \sum \lambda \pi_\lambda$, et $n = u - d$. Montrer que :
   - d est diagonalisable,
   - n est nilpotent,
   - $u = d + n$,
   - d et n commutent,
   - d et n sont des polynômes en u.
2. Soit $u = d' + n'$ une autre décomposition de u pour laquelle :
   - d' est diagonalisable,
   - n' est nilpotent,
   - $u = d' + n'$,
   - d' et n' commutent.

   Montrer que d' et n' commutent à d et n. En déduire que $d' = d$ et $n' = n$.

Le couple (d, n) s'appelle la **décomposition de Dunford** de u.

Exercice 15. Soit $u \in \operatorname{End}(E)$ un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E de dimension finie.

1. On suppose que u est nilpotent. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\operatorname{tr}(u^k) = 0$.
2. On suppose que $\operatorname{tr}(u^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et que K est de caractéristique 0. Montrer que u est nilpotent.
3. Qu'advient-il en caractéristique p ?

Exercice 16. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices et $C = AB - BA$. On suppose que $AC - CA = 0$. Montrer que C est nilpotente.

Exercice 17. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ deux matrices trigonalisables. On définit $\Phi_{A,B} \in \operatorname{End}(\mathcal{M}_n(K))$ par $\Phi_{A,B}(X) = AX - XB$.

1. Montrer que $\Phi_{A,B}$ est aussi trigonalisable.
2. Montrer que les matrices A et B sont diagonalisables si, et seulement si, $\Phi_{A,B}$ l'est aussi.
   Indication : On pourra utiliser la décomposition de Dunford de A et de B.

Problèmes

Classes de similitudes et réduction

Exercice 18. Le but de cet exercice est de montrer que deux permutations $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ sont conjuguées si, et seulement si, les matrices de permutations $P_\sigma, P_\tau \in \mathcal{M}_n(K)$ sont semblables.

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $k \in [\![1, n]\!]$, on définit $c_k(\sigma)$ comme le nombre de cycles de longueur k de σ.

1. Décrire les classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$ à l'aide des c_k.
2. On pose $V^\sigma = \{v \in K^n \ , \ P_\sigma(v) = v\}$. Déterminer $\dim V^\sigma$ en fonction des $c_k(\sigma)$.
3. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k(\sigma^m) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{pgcd}(k, m) c_k(\sigma)$.
4. Soit A la matrice ayant pour coefficients $a_{i,j} = \mathrm{pgcd}(i, j)$. Calculer $\det A$.
5. En déduire que si P_σ et P_τ sont conjuguées, alors σ et τ sont semblables.
6. Conclure.

Exercice 19. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice quelconque. On note $S(A) = \{P^{-1}MP \ , \ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$ l'ensemble des matrices semblables à A et $\overline{S(A)}$ son adhérence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Réaliser $S(A)$ comme une orbite pour l'action d'un certain groupe sur un certain ensemble que l'on précisera.
2. Montrer que $\overline{S(A)}$ contient une matrice diagonalisable.
3. Montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe une matrice $B \in S(A)$ telle que B est triangulaire supérieure et dont les coefficients non diagonaux sont de module inférieur à ε.
4. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, $S(A)$ est fermé.
5. Montrer que A est nilpotente si, et seulement si, $0 \in \overline{S(A)}$.

Décomposition de Dunford effective

Exercice 20. Soit u un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un polynôme $P \in K[X]$ tel que P est premier à P', et $P(u)^m = 0$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$. On se propose de montrer l'existence de $v, w \in K[u]$ tels que w est nilpotent, $P(v) = 0$ et $u = v + w$.

On définit par récurrence une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = u$ et $u_{k+1} = u_k - P(u_k)P'(u_k)^{-1}$pour tout $k \geq 0$.

1. Montrer que u_{k+1} est bien défini pour tout $k \in \mathbb{N}$ et que $P^m(u_i) = 0$ pour tout i.
2. Montrer qu'il existe un indice k tel que $P(u_k) = 0$ et conclure.
3. Quelle relation y a-t-il entre une décomposition ainsi construite et la décomposition de Dunford ? Donner des exemples pour lesquels les hypothèses de l'énoncé s'appliquent.

Exercice 21. ***(Théorème de Burnside)***
Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $(M_1, \ldots, M_r)$ une base de $\mathrm{Vect}(G)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose

$$f : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathbb{C}^r \\ A & \mapsto & (\mathrm{tr}(AM_i))_i \end{array} .$$

1. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que N est nilpotente si, et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{tr}(N^k) = 0$.
2. Montrer que si $f(A) = f(B)$, alors $AB^{-1} - I_n$ est nilpotente.
3. Montrer que si tous les éléments de G sont diagonalisables, alors f est injective.
4. En déduire que tout sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini est en fait un groupe fini.