ÉNS de Lyon
M2 FEADéP

Cours d'algèbre
2019–2020

FEUILLE D'EXERCICES N°3 :
FACTEURS INVARIANTS, DÉCOMPOSITION DE JORDAN

À faire

Exercice 1. Calculer les facteurs invariants :

— d'une homothétie ;

— d'un endomorphisme diagonalisable ayant toutes ses valeurs propres distinctes ;

— d'une transvection ;

— d'un endomorphisme nilpotent (discuter suivant son ordre) ;

— d'un projecteur (discuter suivant sa trace).

Exercice 2. Donner la liste des invariants de similitude, le polynôme minimal et la forme de Jordan des matrices à coefficients dans $\mathbb{Q}$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & 9 & 13 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.

1. Donner la liste des classes de similitude d'endomorphismes de $\mathbb{Q}^5$ ayant pour polynôme caractéristique $(X^2-2)(X-1)^3$.
2. Donner la liste des classes de similitude d'endomorphismes de $\mathbb{Q}^5$ ayant pour polynôme minimal $(X-2)^3$.

Exercice 4. Soit K un corps algébriquement clos et u un endomorphisme de K^n. Montrer que le nombre d'invariants de similitudes de u est égal à la dimension maximale d'un espace propre de u.

Exercice 5. Soit K un corps et E un K-espace vectoriel de dimension $d > 0$.

1. Montrer que lorsque $d = 2$, deux endomorphismes de E sont semblables si et seulement s'ils ont le même polynôme minimal.
2. Montrer que lorsque $d = 3$, deux endomorphismes de E sont semblables si et seulement s'ils ont le même polynôme minimal et le même polynôme caractéristique.
3. Que peut-on dire lorsque $d \geq 4$?

Exercice 6. Pour chacune des matrices suivantes, dire si elle est semblable à une matrice réelle et en proposer une lorsque c'est le cas.

$$M_1 = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \text{ and } M_2 = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Soit K un corps algébriquement clos et E un K-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que u et v sont semblables si et seulement si pour tout $\lambda \in K$ et tout $n > 0$, les endomorphismes $(u - \lambda\,\mathrm{id})^n$ et $(v - \lambda\,\mathrm{id})^n$ ont même rang.

Problèmes

Décomposition de Jordan

Si m est un entier, on appelle bloc de Jordan nilpotent de taille m et on note J_m la matrice carrée de taille m suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 8.

1. Montrer que J_n est la matrice d'un endomorphisme nilpotent d'indice n.
2. Réciproquement, montrer que si u est un endomorphisme nilpotent d'indice n de E de dimension n, alors existe une base de E dans laquelle la matrice de u est J_n.

Exercice 9. Soit u un endomorphisme nilpotent. On dira que u est **jordanisable** s'il existe une décomposition $E = \oplus_{i=1}^r E_i$ en sous-espaces stables par u tels que, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on a $u_{|E_i}$ est nilpotent d'indice $\dim E_i$.

1. Montrer que si u est nilpotent d'indice $\dim E$, alors u est jordanisable.
2. Montrer que s'il existe une décomposition $E = F \oplus G$ stable par u telle que $u_{|F}$ et $u_{|G}$ sont jordanisables, alors u est jordanisable.
3. Soit p l'indice de nilpotence de u et x tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$. On note F_x l'espace engendré par les $u^i(x)$. Montrer que F_x est un sous-espace de E stable par u et que F_x a un supplémentaire stable. *Indication : on pourra considérer une forme linéaire f telle que $f(u^{p-1}(x)) \neq 0$, et le sous-espace F_f de E^* engendré par les $(u^*)^i(f)$.*
4. En déduire que tout endomorphisme nilpotent est jordanisable.
5. On suppose u jordanisée. Donner une formule reliant, pour tout $i \geq 0$, le rang de u^i avec les $\dim E_j$. En déduire que la famille $(\dim E_1, \dots, \dim E_r)$ est unique à permutation près.
6. Énoncer et démontrer un théorème de jordanisation pour les endomorphismes u annulés par un polynôme scindé.

Exercice 10. Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ et $t \in K^\times$.

1. Montrer que si M est nilpotente, alors M et tM sont semblables.
2. Montrer que si t n'est pas une racine de l'unité et si M et tM sont semblables, alors M est nilpotente.

Modules de type fini sur un anneau principal

Exercice 11. Combien y a-t-il de classes d'isomorphismes de groupes abéliens d'ordre 48 ?

Exercice 12. Déterminer les facteurs invariants du $\mathbb{Z}$-module

$$M = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/16\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}.$$

Exercice 13. Soit A un anneau principal et M un A-module de type fini. On appelle *annulateur* de M, noté $\mathrm{Ann}_A(M)$ l'ensemble des éléments de A tel que $a \cdot x = 0$ pour tout $x \in M$.

1. Montrer que $\mathrm{Ann}_A(M)$ est un idéal de A.
2. Comme A est principal, on écrit $\mathrm{Ann}_A(M) = (\delta)$. Quel est le lien entre δ et les facteurs invariants du A-module M ?
3. Soit G un groupe abélien fini et $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $(d) = \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}}(G)$. Montrer que $\mathrm{Card}(G) \geqslant d$ avec égalité si, et seulement si, le groupe G est cyclique.
4. En déduire que tout sous groupe fini du groupe des inversibles d'un corps est cyclique.

Pour aller plus loin

Semi-simplicité

Soit E un K-espace vectoriel de dimension $\dim E = n$.

Exercice 14. On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathrm{End}(E)$ est **simple** si ses seuls sous-espaces stables sont $\{0\}$ et E.

1. Montrer que si u est simple, alors $\mu_u = \chi_u$.
2. En déduire que u est simple si, et seulement si, μ_u est irréductible sur K.

Exercice 15. On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathrm{End}(E)$ est **cyclique** s'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $\mathrm{Vect}\big(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\big) = E$.

1. Justifier que tout endomorphisme simple est cyclique.
2. On suppose que K est infini. Montrer que si u n'a qu'un nombre fini de sous-espaces stables, alors u est cyclique.
3. Soit u un endomorphisme cyclique et $x \in E$ tel que $\mathrm{Vect}\big(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\big) = E$.
   Soit $\Phi : K[X] \to E$ l'application linéaire définie par $\Phi(P) = P(u)(x)$.
   (a) Montrer que F est un sous-espace stable par u de E si, et seulement si, $\Phi^{-1}(F)$ est un idéal de $K[X]$.
   (b) En déduire que u n'a qu'un nombre fini de sous-espaces stables.
   Indication : Penser au polynôme minimal de u.

Exercice 16. Soit $u \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme. On dit qu'un sous-espace $F \subset E$ stable par u est **cyclique** si la restriction $u_{|F}$ de u à F est un endomorphisme cyclique.

1. On suppose que $\mu_u = P^k$ où P est irréductible sur $K[X]$. Montrer que u admet un sous-espace cyclique F tel que $v = u_{|F}$ vérifie $\mu_v = \mu_u$.
2. Pour $x \in E$, on note $F_x = \mathrm{Vect}(u^k(x),\ k \in \mathbb{N})$ et $u_x = u_{|F_x}$. Soit $x, y \in E$. Montrer que si μ_{u_x} et μ_{u_y} sont premiers entre eux, alors $\mu_{u_{x+y}} = \mu_{u_x}\mu_{u_y}$.
3. Montrer qu'il existe un sous-espace cyclique F tel que $\mu_{u_{|F}} = \mu_u$.
4. En déduire que u est cyclique si, et seulement si, $\mu_u = \chi_u$.

Exercice 17. On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathrm{End}(E)$ est **semi-simple** si tout sous-espace stable par u admet un supplémentaire stable.

1. Montrer que u est semi-simple si, et seulement si, μ_u est sans facteurs carrés.
2. En déduire que u est semi-simple si, et seulement si, u est diagonalisable sur une clôture algébrique $\overline{K}$ de K.
3. Montrer que u est semi-simple si, et seulement si, il existe une décomposition $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{r} E_i$ en sous-espaces E_i stables par u tels que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, la restriction $u_{|E_i}$ est simple.
4. (bonus) Montrer que lorsque K est de caractéristique 0, on peut encore définir une décomposition de Dunford (s, n) avec s semi-simple, n nilpotent qui commutent et tels que $u = s + n$.
5. (bonus) Soit k un corps imparfait de caractéristique p et $T \in k$ un élément qui n'est pas une puissance p-ème d'un élément de k. Soit $K = k(T)$. Soit $E = K[X]/(X^p - T)^2$: c'est un K-espace vectoriel de dimension $2p$. Soit $M_X \in \mathrm{GL}(E)$ l'endomorphisme de multiplication par X. Montrer qu'il n'existe pas de décomposition de Dunford pour M_X.
   Indication : On pourra considérer W l'idéal engendré par $X^p - T$ de E vu comme anneau et se restreindre à la structure de K-espace vectoriel de W.