

FEUILLE D'EXERCICES N°4 : ACTIONS DE GROUPES ;
SOUS-GROUPES DISTINGUÉS, GROUPES QUOTIENTS

À faire

Exercice 1. (Groupe quotient)

Soit G un groupe et H un sous-groupe distingué de G . Soit K un sous-groupe de G .

1. Montrer que les sous-groupes de G/H sont en bijection avec les sous-groupes de G contenant H .
2. Montrer que $KH = HK$ et que c'est un sous-groupe de G dans lequel H est distingué.
3. Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe distingué de K .
4. Montrer qu'on a un isomorphisme $KH/H \simeq K/(K \cap H)$.
5. Soit $\pi : G \rightarrow G/H$ la projection canonique. À quelle condition la restriction de π à K est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2. (Normalisateur)

Soit G un groupe et H un sous-groupe de G . On rappelle que le *normalisateur* de H dans G est l'ensemble $\mathcal{N}_G(H) = \{g \in G, gHg^{-1} = H\}$.

1. Montrer que $\mathcal{N}_G(H)$ est un sous-groupe de G dans lequel H est distingué.
2. Soit K un sous-groupe de G contenant H et dans lequel H est distingué. Montrer que K est un sous-groupe de $\mathcal{N}_G(H)$. En déduire que $\mathcal{N}_G(H)$ est le plus grand sous-groupe de G dans lequel H est distingué.
3. Montrer que pour tout sous-groupe K de $\mathcal{N}_G(H)$, l'ensemble KH est un groupe dans lequel H est distingué.
4. On définit une action de G sur l'ensemble de ses sous-groupes par $g \cdot K = gKg^{-1}$.
 - (a) Quel est le stabilisateur d'un sous-groupe de G pour cette action ?
 - (b) On suppose que G est fini. Montrer que le nombre de sous-groupes de G conjugués à H est l'indice $[G : \mathcal{N}_G(H)]$.
 - (c) Montrer que si H et K sont deux sous-groupes de G conjugués dans G , alors $\mathcal{N}_G(H)$ et $\mathcal{N}_G(K)$ aussi.

Exercice 3. Soit G un groupe fini et p le plus petit facteur premier de $|G|$.

1. Montrer que si H est un sous-groupe de G d'indice p , alors H est distingué.
2. En déduire que tout groupe fini d'ordre pq , avec p, q deux nombres premiers, n'est pas simple.

Exercice 4. (Formule de Burnside et applications)

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X . Pour tout $g \in G$, on note $f(g)$ le nombre de points fixes de g dans X , et N le nombre d'orbites de l'action.

1. Montrer la formule de Burnside :

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g).$$

2. Si l'action est transitive et $|X| \geq 2$, montrer qu'il existe un $g \in G$ agissant sans point fixe.
3. En déduire qu'un groupe fini n'est jamais l'union des conjugués d'un sous-groupe strict.

Exercice 5. (Invariants)

Un *invariant* pour l'action de G sur X est une application $f : X \rightarrow Y$ qui est constante sur les orbites de cette action, c'est-à-dire telle que $\forall g \in G, x \in X, f(g \cdot x) = f(x)$.

Un invariant est dit *total* si les fibres de f sont exactement les orbites de l'action de G sur X , autrement dit si $\forall x, x' \in X, (f(x) = f(x') \iff \exists g \in G, g \cdot x = x')$.

1. Donner autant que possible d'exemples pertinents d'invariants pour les actions :
 - par équivalence des matrices ;
 - par conjugaison des matrices carrées ;
 - par congruence des matrices symétriques réelles ;
 - par automorphismes des sous-espaces d'un espace vectoriel fixé.
2. Parmi eux, lesquels sont des invariants totaux ?

Exercice 6. (Théorème de Cauchy)

Soit G un groupe fini de cardinal divisible par un certain nombre premier p . On considère l'ensemble

$$E = \left\{ (g_i)_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \in G^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \mid \prod_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} g_i = 1 \right\},$$

et l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur E définie par $j \cdot (g_i)_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} = (g_{i+j})_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$.

1. Montrer que E est de cardinal $|G|^{p-1}$, et que les points fixes de E pour l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont les (g, \dots, g) avec $g \in G$ tel que $g^p = 1$.
2. En déduire que G admet un élément d'ordre exactement p .

Exercice 7. (p -groupes)

Soit G un p -groupe fini agissant sur un ensemble fini X .

1. Montrer que $|X^G| \equiv |X| \pmod{p}$.
2. Montrer que le centre $\mathcal{Z}(G)$ de G est non trivial. En déduire que si $|G| = p^2$, alors G est abélien. Est-ce également vrai si $|G| = p^3$?
3. Montrer que G admet des sous-groupes distingués d'ordre d pour tout diviseur d de $|G|$. Donner un contre-exemple si G n'est pas un p -groupe.

Problèmes**Exercice 8. (Automorphismes de \mathfrak{S}_n)**

On se propose de montrer que si $n \neq 6$, alors tout automorphisme de \mathfrak{S}_n est intérieur. Soit donc φ un automorphisme de \mathfrak{S}_n .

1. Traiter les cas $n \leq 3$.
2. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et k_i le nombre de cycles de longueur i dans sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints. On note $\mathcal{Z}(\sigma)$ le centralisateur de σ . Montrer que $|\mathcal{Z}(\sigma)| = \prod_{i=1}^n k_i! i^{k_i}$.
3. Soit τ une transposition. Montrer que $\varphi(\tau)$ est un produit de $d \geq 1$ transpositions à supports disjoints.
4. Montrer que $d = 1$ ou que $d = 3$ et $n = 6$.
5. On suppose désormais que $n \neq 6$ et $n \geq 4$. On note $\tau_i = (1 \ i)$.
 - (a) Soit $1 < i < j$. Montrer que $\varphi(\tau_i)$ et $\varphi(\tau_j)$ ont exactement un élément commun dans leur support. On note α_1 l'élément commun aux supports de $\varphi(\tau_2)$ et $\varphi(\tau_3)$.
 - (b) Montrer que α_1 est dans le support de $\varphi(\tau_i)$ pour tout i . On note alors $(\alpha_1 \ \alpha_i)$ le support de $\varphi(\tau_i)$.
 - (c) Montrer que $\alpha : i \mapsto \alpha_i$ est une permutation.
 - (d) Conclure.

Exercice 9. (Théorèmes de Sylow et applications)

Soit G un groupe fini d'ordre n et p un nombre premier. Soit $\alpha, m \in \mathbb{N}^*$ des entiers tels que $n = p^\alpha m$ et p ne divise pas m . On note $\text{Syl}_p(G)$ l'ensemble des sous-groupes de G d'ordre p^α et $N_p(G) \in \mathbb{N}$ le cardinal de cet ensemble fini. Les éléments de $\text{Syl}_p(G)$ sont appelés les p -sous-groupes de Sylow de G et les théorèmes de Sylow sont les suivants :

- (i) $N_p(G) \neq 0$;
 - (ii) les p -sous-groupes de Sylow sont conjugués par des éléments de G ;
 - (iii) $N_p(G) \equiv 1 \pmod{p}$ et que $N_p(G)$ divise m .
1. On suppose que $\text{Syl}_p(G)$ est non vide et on note S l'un de ses éléments. Soit H un sous-groupe de G . On considère l'action de H sur G/S par translation à gauche.
 - (a) Montrer qu'il existe une orbite de cardinal premier à p .
Indication : on pourra remarquer que G/S est de cardinal m premier à p .
 - (b) En déduire qu'il existe un élément $a \in G$ tel que $aSa^{-1} \cap H \in \text{Syl}_p(H)$.
 - (c) En déduire (ii) : deux sous-groupes $S_1, S_2 \in \text{Syl}_p(G)$ sont conjugués par un élément de G .
 2. Calculer l'ordre de $\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ et montrer que $N_p(\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)) \geq 1$.
 3. En déduire (i) : $N_p(G) \geq 1$.
 4. Soit $S_0 \in \text{Syl}_p(G)$, ce qui existe par la question précédente. On considère l'action de S_0 sur $\text{Syl}_p(G)$ par conjugaison.
 - (a) Montrer que cette action admet $S_0 \in \text{Syl}_p(G)$ comme unique point fixe.
Indication : on pourra considérer T un point fixe, $N = \langle S_0, T \rangle$ et montrer que T et S_0 sont conjugués dans N .
 - (b) En déduire (iii) : $N_p(G) \equiv 1 \pmod{p}$ et que $N_p(G)$ divise m .

Voici quelques applications des théorèmes de Sylow.

5. Montrer qu'un groupe de cardinal 24 ne peut pas être simple.
6. Montrer qu'un groupe d'ordre pqr avec $p < q < r$ premiers distincts n'est pas simple.
7. Montrer que \mathfrak{A}_5 est le seul groupe simple d'ordre 60.
8. Soit $p < q$ deux nombres premiers distincts et G un groupe d'ordre pq . Montrer que
 - (a) si $q \not\equiv 1 \pmod{p}$, alors $G \simeq \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$;
 - (b) si $q \equiv 1 \pmod{p}$, alors $G \simeq \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ ou $G \simeq \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
Indication : on pourra considérer un morphisme $\sigma : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$.

Exercice 10. (Groupes finis d'ordre n premier à $\varphi(n)$)

On va montrer par récurrence que si G est un groupe d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ premier avec $\varphi(n)$, alors G est cyclique. Ceci est trivialement vrai pour $n = 1$. Supposons le vrai pour tous les entiers inférieurs à $n - 1$ et donnons-nous un groupe G d'ordre n premier à $\varphi(n)$.

1. Montrer que tout sous-groupe propre de G est cyclique.
2. En déduire que G admet un sous-groupe propre distingué qu'on notera H .
3. Montrer que l'image du morphisme

$$\begin{array}{ccc} G & \rightarrow & \text{Aut}(H) \\ g & \mapsto & (h \mapsto ghg^{-1}) \end{array}$$
 est triviale.
4. En déduire que $H \subset \mathcal{Z}(G)$.
5. Conclure.

Exercice 11. (Groupe fini dont tout sous-groupe est abélien)

Soit G un groupe fini simple. On suppose que tout sous-groupe propre de G est abélien.

1. Montrer que si H est un sous-groupe propre maximal de G alors le nombre de conjugués à H dans G est $\frac{|G|}{|H|}$.
Indication : Montrer que H est son propre normalisateur.
2. Montrer que l'intersection de deux sous-groupes propres maximaux distincts est triviale.
Indication : si $x \in H$ avec H maximal, on montre que H est le centralisateur de x .
3. Montrer que la réunion des conjugués de deux sous-groupes propres maximaux distincts contient plus de $|G|$ éléments.
4. En déduire que G est abélien.

Exercice 12. (Sous-groupes finis de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$)

Soit G un sous-groupe fini de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ d'ordre $n > 1$. Soit $P = \{x \in \mathbb{S}^2, \exists g \in G \setminus \{1\} g(x) = x\}$, c'est-à-dire l'ensemble des points de la sphère unité qui sont sur les axes des rotations $g \in G$.

1. Montrer que G agit naturellement sur P et que le nombre d'orbites est $d = \frac{|P|+2(n-1)}{n} \in \{2, 3\}$.
2. Montrer que si $d = 2$, alors G est un sous-groupe fini de $\text{SO}_2(\mathbb{R})$. En déduire que G est cyclique.
3. On suppose que $d = 3$ et on note $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ les cardinaux des stabilisateurs de ces $d = 3$ orbites.
 - (a) Montrer que $1 + \frac{2}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$.
 - (b) Montrer que $n_1 = 2$ et que $n_2 \in \{2, 3\}$.
 - (c) Montrer que si $n_2 = 2$, alors G admet un sous-groupe cyclique d'ordre $\frac{n}{2}$. En déduire qu'alors G est un groupe diédral.
 - (d) On suppose que $n_2 = 3$. Montrer que $n_3 \in \{3, 4, 5\}$ et calculer les valeurs correspondantes pour n .
 - i. Montrer que si $n_3 = 3$, alors $G \simeq \mathfrak{A}_4$.
Indication : en considérant l'action de G sur une orbite à 4 éléments, montrer que G s'injecte dans \mathfrak{S}_4 .
 - ii. Montrer que si $n_3 = 4$, alors $G \simeq \mathfrak{S}_4$.
Indication : en notant $\pm x_1, \dots, \pm x_4$ les points de l'orbite à 8 éléments, montrer que G permute les paires $(x_i, -x_i)$.
 - iii. Montrer que si $n_3 = 5$, alors $G \simeq \mathfrak{A}_5$.
Indication : amusez-vous bien !

Exercice 13. (Sous-groupe de Frattini d'un p -groupe fini)

Soit G un p -groupe fini. On appelle *sous-groupe de Frattini* de G , noté $\Phi(G)$, l'intersection des sous-groupes propres maximaux de G .

1. Que dire de $\Phi(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$? de $\Phi((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n)$?
2. Soit H un sous-groupe propre de G . Montrer que le normalisateur de H contient strictement H .
Indication : faire agir H par conjugaison sur l'ensemble X des conjugués de H dans G distincts de H et raisonner sur $|X| \pmod p$.
3. En déduire que si H est un sous-groupe propre maximal de G , alors H est distingué et $G/H \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
4. On note $G^p[G, G]$ le sous-groupe de G engendré par les puissances p -èmes et les commutateurs d'éléments de G .
 - (a) Montrer que $G^p[G, G] \subset \Phi(G)$.
 - (b) Montrer que $G/G^p[G, G]$ est un \mathbb{F}_p -espace vectoriel.
 - (c) Montrer que la surjection naturelle $G/G^p[G, G] \rightarrow G/\Phi(G)$ est un isomorphisme.
 - (d) En déduire que $\Phi(G) = G^p[G, G]$.
5. Montrer que $\dim_{\mathbb{F}_p}(G/\Phi(G))$ est le nombre minimal de générateurs de G .