ÉNS de Lyon
M2 FEADéP

Cours d'algèbre
2019–2020

Feuille d'exercices n°7 : Réduction des endomorphismes normaux. Espaces hermitiens et groupe unitaire.

Dans toute cette feuille, L est un corps de caractéristique $\mathrm{car}(L) \neq 2$ et σ est un automorphisme de L tel que $\sigma^2 = \mathrm{id}_L$. On désigne par K le sous-corps fixé par σ. Si cela vous perturbe, vous pouvez prendre par convention $L = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$ et σ est la conjugaison complexe.

On désigne par V un L-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par φ une forme sesquilinéaire (ou bilinéaire) sur V.

À faire

Exercice 1. Soit $\mathcal{H}(V)$ l'ensemble des formes hermitiennes sur V.

1. Montrer que $\mathcal{H}(V)$ est un K-espace vectoriel et préciser sa dimension.
2. On suppose que $K = \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{H}^+(V)$ des formes hermitiennes φ positives (resp. $\mathcal{H}^{++}$ des formes hermitiennes définies positives) est un convexe de $\mathcal{H}(V)$.
   (b) Pour $\mathcal{H}^+(V)$ et $\mathcal{H}^{++}(V)$, déterminer son adhérence dans $\mathcal{H}(V)$. Est-ce un ouvert de $\mathcal{H}(V)$?

Exercice 2. Soit (V, φ) un $\mathbb{C}$-espace vectoriel hermitien et $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ un endomorphisme hermitien.

1. Montrer que les valeurs propres de u sont réelles.
2. On les ordonnes $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Montrer les égalités suivantes :

$$\max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i| = \sup_{x\neq 0} \frac{\sqrt{\varphi(u(x), u(x))}}{\sqrt{\varphi(x,x)}}, \qquad \lambda_1 = \inf_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\varphi(u(x), x)}{\varphi(x,x)}, \qquad \lambda_n = \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\varphi(u(x), x)}{\varphi(x,x)}.$$

3. On note $\mathcal{H}(V)$ l'espace des endomorphismes hermitiens. Montrer que les application $\mathcal{H}(V) \to \mathbb{R}$ définies par $u \mapsto \lambda_1(u)$ et $u \mapsto \lambda_n(u)$ sont continues.

Exercice 3. Soit φ une forme hermitienne. On suppose que $K = \mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $x \in V$, on a $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que φ est anisotrope si, et seulement si, elle est définie positive ou définie négative.
   Indication : on pourra étudier l'application $t \mapsto \varphi(x + ty, x + ty)$.

Exercice 4. ***(Endomorphismes adjoints)***
On suppose que φ est hermitienne (ou bilinéaire symétrique si $L = \mathbb{R}$). Soit u un endomorphisme autoadjoint pour φ.

1. Quelle est la forme de la matrice de u dans une base de diagonalisation de φ ?
2. Si W est un sous-espace stable de V pour u, montrer que $W^\perp$ l'est aussi.
3. Réciproquement, pour un endomorphisme quelconque u de V stabilisant W et $W^\perp$, si φ n'a pas de vecteurs isotropes, montrer que u est hermitien si, et seulement si, $u_{|W}$ et $u_{|W^\perp}$ le sont.
4. En déduire que les symétries orthogonales sont toujours symétriques (au sens de φ).
5. Qu'en est-il des projecteurs orthogonaux ?

Exercice 5. Soit (V, φ) un $\mathbb{C}$-espace vectoriel hermitien.

1. Montrer que tout endomorphisme de V est trigonalisable **en base orthonormée**.
2. Soient $u, v \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ deux endomorphismes qui commutent. Montrer qu'il existe une base orthonormée de V qui cotrigonalise u et v.

Exercice 6. ***(Matrices normales)***

On se place sur $V = \mathbb{C}^n$ muni du produit hermitien usuel $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$. Soit $u \in \mathrm{End}(V)$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

1. À quelle(s) condition(s) sur $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, l'endomorphisme u est-il normal ? hermitien ? antihermitien ? unitaire ?

On appellera matrices *normales* (resp. *hermitiennes*, *antihermitiennes*, *unitaires*, dont les ensembles sont notés $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{AH}_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$) les matrices correspondantes.

2. Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure est normale si, et seulement si, elle est diagonale.
3. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les racines de χ_A. Montrer que A est normale si, et seulement si, $\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2$.

   Indication : on pourra introduire la norme de Schur $\|A\|^2 = \mathrm{tr}\,(AA^*)$.
4. Montrer que toute matrice hermitienne $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ s'écrit $A = P^{-1}DP$ avec $P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ et D diagonale.
5. Montrer que si $A \in \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, alors AB est diagonalisable à valeurs propres réelles.

Exercice 7. ***(Transvections unitaires)***

On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que φ est hermitienne. Soit τ une transvection de V qu'on écrit sous la forme $\tau(x) = x + f(x)v$ avec $v \in V \setminus \{0\}$ et $f \in V^*$ telle que $f(v) \neq 0$. On suppose que $\tau \in \mathcal{U}(\varphi)$.

1. Montrer que v est isotrope.
2. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $\forall x \in V,\ f(x) = \lambda \varphi(x, v)$.
3. Préciser l'hyperplan de τ et montrer que λ est imaginaire pur.

Exercice 8. ***(Exponentielle de matrices)***

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si A est antisymétrique, alors $\exp(A)$ est orthogonale.
2. Montrer que si A est hermitienne, alors $\exp(iA)$ est unitaire.
3. Toute matrice unitaire $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est-elle de la forme $U = \exp(iA)$?

Pour aller plus loin

Exercice 9. ***(Décomposition de Bruhat d'un groupe spécial unitaire de rang*** 1***)***

Soit V un L-espace vectoriel de dimension 3 et h la forme sesquilinéaire $V \times V \to L$ donnée par $h((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \overline{x_1} z_2 + \overline{y_1} y_2 + \overline{z_1} x_2$.

1. Montrer que h est une forme hermitienne non-dégénérée.

On note $G = \mathrm{SU}(h)$ le groupe spécial unitaire de (V, h), i.e. $G = \{u \in \mathrm{SL}(V),\ h(u(x), u(y)) = h(x, y)\ \forall x, y \in V\}$. On identifie $\mathrm{SL}(V)$ à $\mathrm{SL}_3(L)$ et G à un sous-groupe.

2. Montrer que l'ensemble des matrices diagonales de G est le sous-groupe $T = \{\mathrm{diag}(t, \bar{t}t^{-1}, \bar{t}^{-1}),\ t \in L^*\}$.
3. Montrer que l'ensemble des matrices unitriangulaires supérieures de G est le sous-groupe $U = \{\begin{pmatrix} 1 & -u & -v \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ (u, v) \in L,\ u\overline{u} = v + \overline{v}\}$.
4. Soit $m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $m \in \mathrm{SU}(h)$ et que le normalisateur de T est $\mathcal{N}_G(T) = mT \sqcup T$.
5. Montrer que $G = TU \sqcup UmTU$.