Feuille d'exercices n°8 : Formes multilinéaires, déterminant.

Dans toute cette feuille on fixe un corps K, et tous les espaces vectoriels considérés sont sur K et de dimension finie. Soit E un espace vectoriel, et $r \geqslant 1$.

On note $\mathcal{L}_r(E)$ l'espace des applications r-linéaires de E^r dans K.

On note $\mathcal{S}_r(E)$ le sous-espace des applications symétriques, c'est-à-dire des f telles que $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r)}) = f(x_1, \dots, x_r)$ pour tout $(x_1, \dots, x_r) \in E^r$ et tout $\sigma \in \mathfrak{S}_r$.

On note $\mathcal{A}_r(E)$ le sous-espace des applications antisymétriques, c'est-à-dire des f telles que $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_r)$ pour tout $(x_1, \dots, x_r) \in E^r$ et tout $\sigma \in \mathfrak{S}_r$.

À faire

Exercice 1.

1. Montrer que si K est de caractéristique 2, alors $\mathcal{S}_r(E) = \mathcal{A}_r(E)$.
2. Montrer que si K n'est pas de caractéristique 2, alors $\mathcal{L}_2(E) = \mathcal{S}_2(E) \oplus \mathcal{A}_2(E)$.
3. On suppose que K n'est pas de caractéristique 2. Montrer que $\mathcal{A}_r(E)$ est l'ensemble des formes alternées, c'est-à-dire des f telles que $f(x_1, \dots, x_r) = 0$ dès que la famille $(x_1, \dots, x_r)$ est liée.
4. Si K est de caractéristique 2, quelle est la relation entre $\mathcal{A}_r(E)$ et l'ensemble des formes alternées ?

Exercice 2.

1. Donner des bases de $\mathcal{L}_r(E)$, de $\mathcal{S}_r(E)$ et de $\mathcal{A}_r(E)$.
2. En déduire la dimension de $\mathcal{A}_r(E)$ pour tout r.

Exercice 3. Soit V et W deux espaces vectoriels de dimension finie. On note $\mathcal{L}_2(V, W)$ l'espace des applications bilinéaires de $V \times W$ dans K.

1. Donner des isomorphismes $u_1 : \mathcal{L}_2(V, W) \to \mathrm{Hom}(V, W^*)$ et $u_2 : \mathcal{L}_2(V, W) \to \mathrm{Hom}(W, V^*)$.
2. Soit $\varphi \in \mathcal{L}_2(V, V)$. Montrer que $u_1(\varphi)$ et $u_2(\varphi)$ ont même rang, appelé le rang de ϕ.
   Indication : on pourra fixer des bases $\mathbf{v}$ *de* V *et* $\mathbf{w}$ *de* W *et comparer la matrice de* φ *dans les bases* $\mathbf{v}$ *et* $\mathbf{w}$*, la matrice de* $u_1(\varphi)$ *dans les bases* $\mathbf{v}$ *et* $\mathbf{w}^*$ *et la matrice de* $u_2(\varphi)$ *dans les bases* $\mathbf{w}$ *et* $\mathbf{v}^*$.

Exercice 4. Soit $\varphi \in \mathcal{S}_2(V)$.

1. Montrer que $u_1(\varphi) = u_2(\varphi)$. On notera cette application φ_V.
2. Soit W un supplémentaire de $\ker \varphi_V$ dans V. Montrer que la restriction de φ à $W \times W$ est non dégénérée (c'est-à-dire de rang maximal).
3. Soit W un sous-espace de V tel que la restriction de φ à $W \times W$ soit non dégénérée. Montrer que W est contenu dans un supplémentaire de $\ker \varphi_V$.

Exercice 5. Soient V, W des espaces vectoriels, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in V^*$ et $\mu_1, \dots, \mu_r \in W^*$.

1. Montrer que l'application $\begin{array}{rccc} \varphi : & V \times W & \to & K \\ & (x, y) & \mapsto & \sum_{i=1}^r \lambda_i(x)\mu_i(y) \end{array}$ est dans $\mathcal{L}_2(V, W)$.
2. Montrer que le rang de φ est inférieur ou égal à r.

Exercice 6. ***(Déterminant)***
Soit A un anneau commutatif unitaire.

1. Montrer qu'il existe une unique application $\det : \mathcal{M}_n(A) \to A$ qui est A-multilinéaire, alternée par rapport aux colonnes, et telle que $\det(\mathrm{I}_n) = 1$.
2. Montrer que pour toute famille de coefficients $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$, toute famille de vecteurs colonnes $C_1, \dots, C_n$ de taille n, et tout $i \in [\![1, n]\!]$ on a (*règle de Cramer*) :

$$a_i \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) = \det\left(C_1, \dots, \sum_{i=1}^n a_i C_i, \dots, C_n\right)$$

3. Soient $C_1, \dots, C_n$ des vecteurs colonnes de taille n. On pose $D_j = a_{j,1}C_1 + \cdots a_{j,n}C_n$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$. Montrer que $\det(D_1, \dots, D_n) = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \right) \cdot \det(C_1, \dots, C_n)$.
4. Retrouver que lorsque A est un corps, la famille de vecteurs $(C_1, \dots, C_n)$ in A^n est libre si, et seulement si, $\det(C_1, \dots, C_n) = 0$. Que se passe-t-il en général sur un anneau A ?
5. Montrer que $\det(M) = \det({}^tM)$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
6. Soit $M = ((m_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On appelle (i,j)-ème *mineur* de M la matrice $M_{\widehat{i,j}}$ extraite de M en ôtant la i-ème ligne et la j-ème colonne. Le nombre $\widetilde{M_{i,j}} = (-1)^{i+j} \det(M_{\widehat{i,j}})$ est appelé le (i,j)-ème *cofacteur* de M. Montrer que

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!], \quad \det(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,j} \widetilde{M_{k,j}} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} \widetilde{M_{i,k}}.$$

7. Soit $\mathrm{com}(M) = \left(\widetilde{M_{i,j}} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice des cofacteurs de M, appelée *comatrice* de M. Montrer que ${}^t\,\mathrm{com}(M) M = M^t\,\mathrm{com}(M) = \det(M) \cdot \mathrm{I}_n$.
8. En déduire que M est inversible dans $\mathcal{M}_n(A)$ si, et seulement si, $\det(M)$ est inversible dans A.

Problèmes

Exercice 7. ***(Formule de Cauchy-Binet)***
Soit $M \in \mathcal{M}_n(A)$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$. Un k-*mineur* de M est une matrice carrée extraite de M de taille k de la forme $M_{I,J} = (m_{i_r,j_s})_{1 \le r,s \le k}$ où $I = \{i_1, \dots, i_k\}, J = \{j_1, \dots, j_k\} \in \mathcal{P}_k([\![1, n-1]\!])$ sont des parties de même cardinal k.

1. Montrer que le rang de M est le plus grand entier $k \in [\![0,n]\!]$ tel qu'il existe un k-mineur de M inversible.

Pour $I = \{i_1, \dots, i_k\} \in \mathcal{P}_k([\![1, n-1]\!])$, on définit $\widehat{I} = \{i_{k+1}, \dots, i_n\}$ tel que $[\![1,n]\!] = I \sqcup \widetilde{I}$ et ε_I la signature de la permutation $\sigma : t \mapsto i_t$.

2. Montrer que pour toutes parties $I, J \in \mathcal{P}_k([\![1,n]\!])$ de cardinal k, on a :

$$\det(M) = \sum_{H \in \mathcal{P}_k([\![1,n]\!])} \varepsilon_H \det(M_{I,H}) \det(M_{\widehat{I},\widehat{H}}) = \sum_{H \in \mathcal{P}_k([\![1,n]\!])} \varepsilon_H \det(M_{H,J}) \det(M_{\widehat{H},\widehat{J}}).$$

3. Soient $m \leqslant n$ des entiers naturels. Soit $P \in \mathcal{M}_{m,n}(A)$ et $Q \in \mathcal{M}_{n,m}(A)$. Montrer que

$$\det(PQ) = \sum_{I \in \mathcal{P}_m([\![1,n]\!]} \det\left(P_{[\![1,m]\!],I}\right) \det\left(Q_{I,[\![1,m]\!]}\right).$$

Pour aller plus loin

Exercice 8. ***(Pfaffien)***
On considère $E = K^n$ un K-espace vectoriel de dimension paire $n = 2m$. On suppose $\mathrm{car}(K) \neq 2$.

1. Soit φ une forme bilinéaire alternée sur E. Montrer que E se décompose en une somme directe $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_m$ de m sous-espaces de dimension 2 stables par φ.
2. En déduire que toute matrice antisymétrique $M \in \mathcal{A}_{2m}(K)$ est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Montrer qu'il existe un unique polynôme $\mathrm{Pf}_m \in \mathbb{Z}[X_{i,j}\,,\ 1 \le i < j \le 2m]$ tel que :
   — pour tout corps K et toute matrice antisymétrique $A \in \mathcal{A}_{2m}(K)$, on a $\mathrm{Pf}_m(A)^2 = \det(A)$;
   — $\mathrm{Pf}_m(\mathrm{diag}(J, \dots, J)) = 1$.
4. Montrer que le polynôme ainsi défini Pf_m est homogène et irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 9. ***(Application aux classes de conjugaison dans*** $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$***)***
Soit $M \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) la matrice $A = M - {}^tM$ est inversible ;
   (ii) le polynôme caractéristique χ_M n'a pas de racines réelles ;
   (iii) $\mathrm{Pf}(M) \neq 0$.
2. En déduire que deux matrices $M, N \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sont conjuguées si, et seulement si, $\chi_M = \chi_N$ et $\mathrm{Pf}(M - {}^tM) = \mathrm{Pf}(N - {}^tN)$.