

FEUILLE D'EXERCICES N°9 : GROUPES LINÉAIRES SUR UN CORPS QUELCONQUE

Dans toute cette feuille K est un corps et E est un K -espace vectoriel de dimension finie.

À faire

Exercice 1. (Dilatations)

On suppose que le corps K contient au moins 3 éléments. Soit H un hyperplan de E . Soit $u \in \text{GL}(E)$ tel que $u_H = \text{id}_H$.

1. Montrer que s'équivalent :

(i) $\det(u) \neq 1$;

(ii) u est diagonalisable et admet une valeur propre $\lambda \neq 1$;

(iii) $\text{im}(u - \text{id}) \not\subset H$;

(iv) il existe $\lambda \in K \setminus \{0, 1\}$ et une base \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$.

2. Justifier que u est une dilatation et préciser la droite D qui lui est associée.

Exercice 2. (Transvections)

Soit $f \in E^* \setminus \{0\}$ une forme linéaire non nulle et $H = \ker f$ l'hyperplan associé. Soit $u \in \text{GL}(E)$ tel que $u_H = \text{id}_H$ et $u \neq \text{id}_E$.

1. Montrer que s'équivalent :

(i) $\det u = 1$;

(ii) u n'est pas diagonalisable ;

(iii) $D = \text{im}(u - \text{id}_E) \subset H$;

(iv) l'endomorphisme induit $u_{E/H} : E/H \rightarrow E/H$ est l'identité $\text{id}_{E/H}$;

(v) il existe un vecteur non nul $a \in H \setminus \{0\}$ tel que $\forall x \in E, u(x) = x + f(x)a$;

(vi) il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$.

2. Justifier que u est une transvection et identifier ses paramètres dans les précédentes descriptions.

Exercice 3. (Caractérisation duale des transvections)

Soit D une droite de E . On note $V(D)$ l'ensemble des transvections $u \in \text{GL}(E)$ telles que $D = \text{im}(u - \text{id}_E)$ et $U(D) = V(D) \cup \{\text{id}_E\}$.

1. Soit $u \in \text{GL}(E)$. Montrer que s'équivalent :

(i) $u \in U(D)$;

(ii) $u_D = \text{id}_D$ et l'endomorphisme induit $u_{E/D} : E/D \rightarrow E/D$ est l'identité $\text{id}_{E/D}$.

2. Montrer que $U(D)$ est un groupe commutatif isomorphe à $(K^{n-1}, +)$.

3. Calculer les sous-groupes conjugués à $U(D)$ et le normalisateur de $U(D)$ dans $\text{GL}(E)$.

Exercice 4. Soit H un hyperplan de E , soit D une droite de E , soit $\lambda \in K^*$ et $g \in \text{GL}(E)$ un endomorphisme inversible. Montrer que si $h \in \text{GL}(E)$ est une transvection (resp. dilatation) d'hyperplan H , de droite D (resp. et de rapport λ), alors ghg^{-1} est une transvection (resp. dilatation) d'hyperplan $g(H)$, de droite $g(D)$ (resp. et de rapport λ).

Exercice 5. Soit $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $g \in \text{GL}(E)$ un endomorphisme inversible laissant stable tous les sous-espace de E de dimension r . Montrer que g est une homothétie.

Exercice 6. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ est connexe par arcs.

Exercice 7. (Résultats de conjugaison)

Démontrer les résultats suivants :

1. Les transvections dans $\mathrm{GL}(E)$ sont deux à deux conjuguées.
2. Deux dilatations de $\mathrm{GL}(E)$ sont conjuguées si, et seulement si, elles ont même rapport.
3. Si $\dim E \geq 3$, alors les transvections dans $\mathrm{SL}(E)$ sont deux à deux conjuguées.
4. Dans $\mathrm{SL}_2(K)$, toute transvection est conjuguée à $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour un certain $\lambda \in K^*$.
5. Dans $\mathrm{SL}_2(K)$, les matrices $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont conjuguées si, et seulement si, le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ est un carré dans K^\times .

Exercice 8. Soit $n, q \in \mathbb{N}^*$ tels que q est la puissance d'un certain nombre premier. Exprimer en fonction de n et q les cardinaux des groupes suivants :

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q) \quad \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q) \quad \mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q) \quad \mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$$

Indication : On pourra montrer que si $d = \mathrm{pgcd}(n, q-1)$, alors $\mu_n(\mathbb{F}_q) = \mu_d(\mathbb{F}_q)$.

Exercice 9. (*p*-Sylow des groupes linéaires finis)

Soit $n, q \in \mathbb{N}^*$ tels que q est la puissance d'un nombre premier p .

1. Montrer que les p -Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ sont trigonalisables, c'est-à-dire qu'il existe une base commune de trigonalisation et que $(X-1)^n$ est le polynôme caractéristique de tout élément d'un p -Sylow.
2. Quel est le nombre d'hyperplans dans \mathbb{F}_q^n ?
3. On appelle *drapeau complet* d'un espace vectoriel E de dimension n une suite strictement croissante d'espaces vectoriels $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n = E$. Combien y a-t-il de drapeaux complets dans \mathbb{F}_q^n ?
4. En déduire le nombre de p -Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.
5. Quel est le cardinal du normalisateur d'un p -Sylow ?
6. Retrouver le nombre de p -Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.

Exercice 10. (Sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$)

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une forme quadratique définie positive sur \mathbb{R}^n telle que $G \subset \mathcal{O}(q)$.
2. En déduire G est un sous-groupe d'un conjugué de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Problèmes

Exercice 11. (Groupe dérivé)

On se propose de calculer le groupe dérivé de $\mathrm{SL}_n(K)$ lorsque $n \geq 3$ et $k = \mathrm{Card} K \geq 3$, où la notation $\mathrm{Card} X \geq m$ signifie que l'ensemble X contient au moins $m \in \mathbb{N}^*$ éléments distincts.

1. On suppose que $n \geq 3$ et $\mathrm{Card} K \geq 3$, montrer que toute transvection t s'écrit comme un commutateur $t = [v, t]$ avec $v \in \mathrm{SL}_n(K)$.
2. On suppose que $n = 2$ et $\mathrm{Card} K \geq 4$. Soit $\lambda \in K \setminus \{-1, 0, 1\}$. En considérant les éléments $s = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$ et $t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, montrer que toute transvection s'écrit comme un commutateur dans $\mathrm{SL}_2(K)$.
3. On suppose que $n \geq 3$ et $\mathrm{Card} K = 2$. Soit $\lambda \in K \setminus \{-1, 0, 1\}$. En considérant les éléments $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, montrer que toute transvection s'écrit comme un commutateur dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_2)$.
4. Conclure que si $n \geq 3$ ou $\mathrm{Card} K \geq 4$, alors $\mathcal{D}(\mathrm{SL}_n(K)) = \mathrm{SL}_n(K)$.
5. Montrer que si $n \geq 3$ ou $\mathrm{Card} K \geq 3$, alors $\mathcal{D}(\mathrm{GL}_n(K)) = \mathrm{SL}_n(K)$.
6. Traiter les cas restants ou regarder les exercices suivants.

Exercice 12. (Simplicité des $\mathrm{PSL}_n(K)$ lorsque $n \geq 3$)

On suppose que $n \geq 3$ et K est un corps quelconque. Soit $E = K^n$. Soit N un sous-groupe distingué de $\mathrm{SL}_n(K)$ contenant le centre Z de $\mathrm{SL}_n(K)$. On suppose que $N \neq Z$.

1. Soit $\sigma \in N \setminus Z$. Justifier l'existence d'un vecteur $a \in E$ tel que la famille $(a, \sigma(a))$ est libre.
2. Soit $\tau \in \mathrm{SL}_n(K)$ une transvection de droite Ka et $\rho = [\sigma, \tau]$. Montrer que $\rho \in N \setminus \{\mathrm{id}_E\}$.
3. Soit H un hyperplan de E contenant a et $\sigma(a)$. Montrer que $\mathrm{im}(\rho - \mathrm{id}_E) \subset H$ et que H est ρ -stable.
4. On suppose qu'il existe une transvection $\tau' \in \mathrm{SL}_n(K)$ d'hyperplan H qui ne commute pas à ρ . Montrer que $[\rho, \tau']$ est une transvection de $\mathrm{SL}_n(K)$ qui est un élément de N .
5. On suppose que ρ commute à toutes les transvections d'hyperplan H . Montrer que ρ est une transvection.
6. Justifier que N contient nécessairement une transvection.
7. En déduire que $N = \mathrm{SL}_n(K)$.
8. Conclure que $\mathrm{PSL}_n(K)$ est simple.
9. Contempler la simplicité des $\mathrm{PSL}_2(K)$ lorsque $\mathrm{Card}(K) \geq 4$ (par exemple dans le livre de D. Perrin, *Cours d'algèbre*).

Exercice 13. (Application : Sous-groupes distingués de $\mathrm{SL}_n(K)$)

Soit $n \geq 3$ et $\pi : \mathrm{SL}_n(K) \rightarrow \mathrm{PSL}_n(K)$ la projection canonique. Soit H un sous-groupe de $\mathrm{SL}_n(K)$.

1. Montrer que le centre de $\mathrm{SL}_n(K)$ est cyclique.
2. Montrer que si $\pi(H) = \mathrm{PSL}_n(K)$, alors H contient une transvection.
3. En déduire que tout sous-groupe strict et distingué de $\mathrm{SL}_n(K)$ est cyclique.

Exercice 14. (Isomorphismes exceptionnels pour $q \neq 3$)

Soit q une puissance d'un nombre premier p .

1. En faisant agir $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$, montrer qu'il existe un morphisme injectif $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q) \rightarrow \mathfrak{S}_{q+1}$.
2. En déduire que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$.
3. Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathfrak{A}_5$.
4. Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{S}_5$ et que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{A}_5$.

Exercice 15. (Isomorphismes exceptionnels pour $q = 3$)

On prend $q = 3$.

1. Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$ et que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$.
2. Montrer que le groupe dérivé de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$ est isomorphe au groupe de Klein $K \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.
3. En déduire l'existence d'un morphisme surjectif $\mathcal{D}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)) \rightarrow K$ et d'un morphisme surjectif $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) \rightarrow \mathbb{F}_3$.
4. Décrire les éléments d'ordre 2 de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$.
5. En déduire que $\mathcal{D}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)) \simeq H_8$ où H_8 désigne le groupe des quaternions.
6. Conclure que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq H_8 \rtimes \mathbb{F}_3$.
7. Décrire les éléments divisant 4 de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ et montrer qu'ils forment un sous-groupe H de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ dont on précisera l'ordre.
8. Quels sont les 2-Sylow de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$?
9. Vérifier que les éléments suivants :

$$i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad j = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad k = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

sont dans H et que $\langle i, j, k \rangle \simeq H_8$.

10. En déduire que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ n'est pas le produit direct de H_8 et \mathbb{F}_3 .

Exercice 16. (Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$)

Soit V un espace euclidien et G un sous-groupe compact de $GL(V)$. Soit H un sous-groupe compact de $GL(\mathbb{R}^n)$.

1. Soit C un compact convexe non vide contenu dans V stable par l'action de G . Construire une norme $\|\cdot\|$ sur V qui est G -invariante et telle que pour tous $x \neq y$ dans V , on a :

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 < \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2}$$

2. En déduire que G fixe un point de C .
3. On prend $V = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices symétriques muni de sa structure usuelle d'espace euclidien et on définit :

$$\begin{aligned} \Phi : G &\rightarrow GL(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \\ g &\mapsto (A \mapsto gAg^t) \end{aligned}$$

Vérifier que Φ est un morphisme de groupe.

4. Montrer que $\Phi(H)$ laisse stable l'enveloppe convexe C de l'ensemble $\{hh^t, h \in H\}$.
5. En déduire que H est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 17. (Un isomorphisme remarquable)

Soit $E = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 2 réelles de trace nulle.

1. Justifier que E est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.
2. Définir une action naturelle de $SL_2(\mathbb{R})$ sur E et en déduire un morphisme de groupes $\alpha : SL_2(\mathbb{R}) \rightarrow GL_3(\mathbb{R})$.
3. Soit $q : \begin{matrix} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \det M \end{matrix}$. Montrer que q est une forme quadratique sur E et que $\text{im}(\alpha) \subset \mathcal{O}(q)$.
4. En déduire un morphisme injectif $\beta : PSL_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{O}(q)$
5. Montrer que l'image du morphisme β est un ouvert fermé de $\mathcal{O}(q)$.
Indication : On pourra appliquer le théorème d'inversion locale.
6. En déduire que $PSL_2(\mathbb{R})$ est isomorphe à la composante neutre de $\mathcal{O}(q)$.

Pour aller plus loin**Exercice 18. (Décomposition de Bruhat)**

On rappelle qu'un *drapeau complet* \underline{F} d'un espace vectoriel E de dimension n une suite strictement croissante d'espaces vectoriels $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n = E$.

1. Soit \underline{V} et \underline{W} deux drapeaux complets de $E = K^n$. On pose $U_{i,j} = V_j + W_i$ et $U_{i,0} = 0$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $s(i) = \inf\{j \in \llbracket 1, n \rrbracket, U_{i,j} = U_{i,j-1}\}$.
(a) Exhiber l'existence d'une base (e_1, \dots, e_n) de E telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on ait :

$$W_i = W_{i-1} \oplus Ke_i \quad \text{et} \quad V_{s(i)} = V_{s(i)-1} \oplus Ke_i$$

- (b) Montrer que $s \in \mathfrak{S}_n$.
 - (c) On dit qu'une base \mathcal{B} est adaptée à $(\underline{V}, \underline{W})$ si les V_i et les W_j sont engendrés par des parties de \mathcal{B} . Montrer qu'il existe toujours une base adaptée à deux drapeaux complets.
2. Soit Δ l'ensemble des couples de drapeaux complets de E . Combien l'action de $GL_n(K)$ sur Δ admet-elle d'orbites ?
 3. Déduire des questions précédentes la décomposition de Bruhat $GL_n(K) = BWB$ où W est le groupe des matrices de permutation et B est le sous-groupe de $GL_n(K)$ formé des matrices triangulaires supérieures.