# TD1 - Formes bilinéaires et produits scalaires

## 1 Formes bilinéaires

**Exercice 1** ***Sur la définition d'une forme bilinéaire***

On se donne dans chaque cas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ et une application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$. Dire si $\varphi$ est une application bilinéaire et le cas échéant préciser si elle est symétrique.

a) $E = \mathbb{R}^2$ et $\varphi(u, v) = x_1 x_2 + y_1 y_2$, pour $u = (x_1, y_1)$ et $v = (x_2, y_2)$ éléments de $E$.

b) $E = \mathbb{R}^3$ et $\varphi(u, v) = x_1 y_2 + x_1 y_1$ (notations similaires).

c) $E = \mathbb{R}^2$ et $\varphi(u, v) = x_1 y_2 + x_2 y_1$ (notations similaires).

d) $E = \mathbb{R}[X]$ et $\varphi(P, Q) = P(0)^2$, $P$, $Q \in E$.

e) $E$ est l'espace des fonctions définies et continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles, et

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f(x)g(1-x)dx, \text{ pour tous } f,\, g \in E$$

f) $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour un entier $n \geqslant 1$, et $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}(AB)$ pour $A$, $B \in E$, où Tr désigne la trace d'une matrice.

**Exercice 2** ***Matrice d'un forme bilinéaire***

On définit une forme bilinéaire $\varphi$ sur $\mathbb{R}^3$ par la formule

$$\varphi\left((x, y, z), (x', y', z')\right) = xx' + 2yy' + xy' + yz' - zy' \ .$$

De même, on définir une forme bilinéaire $\psi$ sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $\psi(P, Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\, dt$.

a) Ecrire les matrices de $\varphi$ et $\psi$ dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}_2[X]$.

b) La forme $\varphi$ est-elle symétrique ? Même question pour la forme $\psi$.

c) Soit $P = 1 + X + X^2$ et $Q = 1 - 2X$. Calculer $\psi(P, Q)$ de deux façons : par calcul direct, puis par calcul matriciel.

**Exercice 3** ***Formes bilinéaires données par leurs matrices***

La matrice suivante représent la forme bilinéaire $\varphi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calculer $\varphi((2, 3, 5), (3, 5, 2))$, $\varphi((3, 5, 2), (2, 3, 5))$ et $\varphi((0, -1, 1), (0, -1, 1))$.

b) Donner l'expression de $\varphi$.

c) Cette forme est-elle symétrique ?

**Exercice 4** ***Changement de base***

Soit $E$ l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. On désigne par $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2)$ la base canonique de $E$ et par $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$ la base donnée par $f_1 = (1, 2)$ et $f_2 = (-1, 1)$. Notons $\varphi$ la forme bilinéaire sur $E$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

On note $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ exprimées dans la base $\mathcal{B}_c$.

a) Soit $v$ un vecteur de $E$. Notons $X$ (resp. $X'$) sa matrice colonne de coordonnées dans $\mathcal{B}_c$ (resp. dans $\mathcal{B}$). Expliquer pourquoi on a la relation $X = PX'$.
b) Soit $u$ et $v$ deux vecteurs de $E$. Notons $X$ et $Y$ (resp. $X'$ et $Y'$) leurs vecteurs colonnes de coordonnées dans la base $\mathcal{B}_c$ (resp. dans la base $\mathcal{B}$). Exprimer $\varphi(u, v)$ en fonction de $A$, $X$, $Y$, puis en fonction de $A$, $P$, $X'$, $Y'$.
c) En déduire la formule du cours suivante : la matrice $B$ de $\varphi$ dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par ${}^tPAP$. Calculer la matrice $B$.
d) Comparer $\mathrm{Tr}(B)$ et $\det(B)$ à $\mathrm{Tr}(A)$ et $\det(A)$. Que remarque-t-on ?

**Exercice 5 *** ***Changement de base – bis***

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note $\varphi$ la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$ de matrice dans $\mathcal{B}$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On pose $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = e_2 - e_3$.
a) Montrer que $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
b) Déterminer la matrice $A'$ de $\varphi$ dans la base $\mathcal{C}$.
c) Que valent $\varphi(f_1, f_1)$ et $\varphi(f_2, f_3)$ ?

## 2 Produit scalaire

**Exercice 6** ***Quelques produits scalaires couramment rencontrés***

Pour chaque $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ et chaque $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ ci-dessous, vérifier que $\varphi$ défini un produit scalaire sur $E$.

a) $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant 1$ et $\varphi(X, Y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^tXY$ pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

b) $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ et $\varphi(f, g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$.

c) $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\varphi(P, Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$.

d) $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tAB)$.

e) $E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < +\infty \right\}$ et $\varphi(u, v) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.

**Exercice 7 *** ***Famille orthonormée de fonctions périodiques***

Soit $E = \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $2\pi$-périodiques. Pour $u, v \in E$, on pose

$$\varphi(u, v) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t)v(t)dt$$

a) En s'appuyant sur l'exercice précédent, montrer que cela définit un produit scalaire $\varphi$ sur $E$.
Pour $m, n \in \mathbb{N}^*$. On pose $u_m(t) = \cos(mt)$ et $v_n(t) = \sin(nt)$.
b) Justifier que $u_m, v_n \in E$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$ et calculer $\|u_n\|^2 + \|v_n\|^2$.
c) Pour tout $m, n \in E$, calculer $\|u_m\|$, $\|v_n\|$ et $\varphi(u_m, v_n)$.

**Exercice 8 ***

On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$ et on considère l'ensemble $E$ défini par

$$E = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(0) = P(1) = 0\}$$

a) Montrer que $E$ est un espace vectoriel et en donner une base.
b) Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(P, Q) = -\int_0^1 \big(P(x)Q''(x) + P''(x)Q(x)\big)\, dx$$

Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $E$.

## 3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

**Exercice 9** ***Inégalité de Cauchy-Schwarz***

Démontrer chacune des inégalités suivantes, en choisissant judicieusement un espace vectoriel $E$ et un produit scalaire $\varphi$ sur $E$ que l'on précisera.
a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx \leq \frac{\sqrt{1-e^{-2}}}{2}$.
b) Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\displaystyle\left(\int_0^1 tP(t)dt\right)^2 \leq \frac{1}{3}\int_0^1 P^2(t)dt$.
c) Pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n\sum_{k=1}^n x_k^2$.

**Exercice 10 ***

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ trois nombres réels tels que $2x + 3y + 6z = 7$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 1.$$

**Exercice 11 ***

Montrer que pour toute paire de fonctions $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, on a l'inégalité :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f(t)^2dt}\sqrt{\int_a^b g(t)^2dt}$$

À quelle condition a-t-on égalité ?

**Exercice 12 ** *Caractérisation des produits scalaires en dimension 2***

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ quatre réels. On définit une application

$$\begin{array}{cccc} \varphi & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & \big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) & \mapsto & ax_1x_2 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2 \end{array}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b, c, d)$ pour que $\varphi$ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 13 ****

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace Euclidien. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $n$ vecteurs $u_1, \ldots, u_n \in E$ et un réel strictement positif $C > 0$. On suppose que

$$\forall (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n, \ \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i u_i \right\| \leqslant C$$

Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 \leqslant C^2.$$

# TD2 - Espaces euclidiens et orthogonalité

## 1 Espaces orthogonaux

**Exercice 1** ***Orthogonal d'un espace***

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique. On note $D$ la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u = (1, 2, -1)$ et $P$ le plan vectoriel d'équation $2x + y - z = 0$.
a) Déterminer $P^\perp$ (on donnera un système d'équations et une base).
b) Déterminer $D^\perp$ (on donnera une équation cartésienne et une base).

**Exercice 2** ***Lien entre l'orthogonal d'une partie et l'inclusion***

Soit $E$ un espace euclidien muni d'un produit scalaire.
a) Soient $A$, $B$ des parties de $E$. Montrer que

$$A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp.$$

b) Soit $A$ une partie de $E$. Montrer que $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.
c) Montrer que si $A$ est un sous-espace vectoriel de $E$, on a l'égalité $A = (A^\perp)^\perp$.

**Exercice 3 *** ***Quelques propriétés de l'orthogonal d'un sous-espace***

Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien $E$.
a) Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
b) En déduire que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

**Exercice 4 ***

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f, g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$.
On note : $H = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ et $G$ l'ensemble des applications constantes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
a) Justifier que $H$ est un hyperplan de $E$ et $G$ une droite vectorielle de $E$.
b) En déduire que $E = H \oplus G$.
c) Soit $g \in H^\perp$.

(i) Prouver que $\displaystyle\int_0^1 t.g^2(t)dt = 0$.

(ii) En déduire que : $\forall t \in [0, 1],\ g(t) = 0$.

(iii) Déterminer $H^\perp$.

d) Pour chacune des égalités suivantes, dire si elle est vérifiée ou non. Justifier la réponse.

$$(H^\perp)^\perp = H \qquad H \oplus H^\perp = E \qquad (H \cap G)^\perp = H^\perp + G^\perp \qquad (H + G)^\perp = H^\perp \cap G^\perp$$

**Exercice 5 *** ***Décomposition de l'espace des matrices en sous-espaces orthogonaux***

On fixe un entier $n > 0$ et on note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients réels. On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (A, B) & \mapsto & \mathrm{Tr}({}^tAB) \end{array}$$

où Tr désigne la trace d'une matrice.

a) Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire.
b) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(R)$ ; on a : $\big(\operatorname{Tr}(A)\big)^2 \leqslant n \operatorname{Tr}({}^tAA)$.
On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{AS}_n(\mathbb{R})$) le sous-ensemble de $E$ formé des matrices diagonales (resp. symétriques, antisymétriques).
c) Montrer que $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{AS}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer leurs dimensions respectives.
d) Démontrer qu'on a la somme directe $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{AS}_n(\mathbb{R})$.
e) Déterminer les orthogonaux : $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})^\perp$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$ et $\mathcal{AS}_n(\mathbb{R})^\perp$.

## 2 Procédé de Gram-Schmidt et familles orthonormées

### Exercice 6

a) Montrer que l'application
$$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
définie par
$$\varphi(X, Y) = 2xx' + 2yy' + xy' + x'y \quad \text{où } X = (x, y) \text{ et } Y = (x', y') \in \mathbb{R}^2$$
définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
b) Soit $(e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Calculer $\varphi(e_1, e_2)$. Cette base est-elle orthogonale ?
c) Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ pour $\varphi$ en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à $(e_1, e_2)$.

### Exercice 7

a) On considère l'application $(x, y) \to \langle x, y\rangle$ de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\langle x, y\rangle = (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3) + x_3y_3$$
où $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ dans la base canonique.
b) Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
c) Orthonormaliser la base canonique $(e_1, e_2, e_3)$ pour ce produit scalaire.

### Exercice 8 *

Soit $E = \mathbb{R}_1[X]$. On considère l'application :
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & (P, Q) & \mapsto & P(1)Q(1) + P(0)Q(0). \end{array}$$
a) Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire.
b) Construire à partir de la base $\mathcal{B} = (1, X)$, et en utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, une base $\mathcal{B}'$ de $E$ orthonormée pour $\varphi$.
c) Que dire de la matrice de passage entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ?

### Exercice 9 * *Hyperplan de* $\mathbb{R}^n$

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique. Déterminer une base orthonormée de l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ d'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$.

### Exercice 10 *

Soit $E$ un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle -|-\rangle$.
a) Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de $E$. Montrer que les coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ d'un vecteur $v$ dans $\mathcal{B}$ sont données par $x_i = \langle v|e_i\rangle$, $i = 1, ..., n$, et que l'on a
$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle v|e_i\rangle^2 \ .$$

b) Réciproquement soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une famille de vecteurs non nuls de $E$ telle que, pour tout $v \in E$, on ait :

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle v|e_i \rangle^2 \ .$$

(i) Montrer que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $\|e_i\| \leqslant 1$.

(ii) Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une base orthonormée de $E$. Montrer que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \langle f_j|e_i \rangle^2 = n$.

(iii) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en déduire que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée.

### Exercice 11 * *Vecteurs deux à deux orthogonaux*

Soient $E$ un espace euclidien et $(v_1, ..., v_p)$ une famille de vecteurs non nuls et deux à deux orthogonaux. Montrer que la famille $(v_1, ..., v_p)$ est libre.

## 3 Projection orthogonale et distance

### Exercice 12

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel et de sa base canonique. Soit $F$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation $x + y + z = 0$. On note $p$ la projection othogonale sur $F$.
a) Déterminer une base orthonormée de $F$.
b) Déterminer $F^\perp$ et en donner une base orthonormale.
c) Calculer $d(a, F)$ avec $a = (1, 1, 0)$.

### Exercice 13

On munit $E = \mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique. Soit $F$ le sous-espace de $E$ d'équation cartésienne $x - 2y + z = 0$.
a) Déterminer une base orthonormée de $F$.
b) Déterminer $F^\perp$ ainsi qu'une base orthonormée de cet espace.
c) Rappeler la définition de la projection $p$ de $E$ sur $F$ parallèlement à $F^\perp$.
d) Calculer $p(u)$, où $u = (1, -3, 2)$.

### Exercice 14

Dans l'espace $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel on considère le sous-espace $F$ défini par les équations :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

Déterminer la matrice, dans la base canonique, de l'application $p$ qui à $X \in \mathbb{R}^4$ associe sa projection orthogonale sur $F$.

### Exercice 15

Soient $E$ un espace euclidien de dimension $n$ et $x \in E$. Soit $a$ un vecteur non nul de $E$. Soit $D = \mathrm{Vect}(a)$ et $H = D^\perp$.
a) Quelle la dimension de $H$ ?
b) Exprimer les distances $d(x, D)$ et $d(x, H)$ à l'aide de $\|x\|$ et du produit scalaire $\langle x, a \rangle$.

### Exercice 16 * *Fonctions 2π-périodiques*

Soit $E = \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues $2\pi$-périodiques muni du produit scalaire

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

Soit $F$ le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.
Déterminer le projeté orthogonal sur $F$ de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

**Exercice 17**

a) On considère l'espace euclidien $E = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

Soient $F = \mathbb{R}_1[X]$ le sous-espace de $E$ des polynômes de degré au plus 1 et $p$ la projection orthogonale sur $F$.
b) Déterminer une base orthonormée $\mathcal{F}$ de $F$.
c) Calculer les coordonnées de $P = 1 + X$ dans la base $\mathcal{F}$.
d) Pour quelles valeurs de $a$ et $b$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$ est-elle minimale ?
e) Sans calcul supplémentaire, écrire la matrice $A$ de $p$ dans la base $(1, X, X^2)$ de $E$.

**Exercice 18 ***

On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire : $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tAB)$.
On considère

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

a) Démontrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
b) Déterminer une base de $F^\perp$.
c) Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.
d) Calculer la distance de $J$ à $F$.

**Exercice 19 ***

Sur l'espace $E = \mathbb{R}[X]$, on définit la forme bilinéaire

$$\forall P, Q \in E,\ \langle P, Q \rangle = \int_0^1 tP(t)Q(t)dt$$

a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $E$.
b) Déterminer une base orthonormée de $F = \mathbb{R}_2[X]$.
c) Déterminer le projeté orthogonal sur $F$ de $P = X^3$.
d) Quelle est la distance de $X^3$ à $F$ ?

**Exercice 20 ***

Soit $E$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leq 2$.
a) Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $E$ en posant

$$\langle P, Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$$

b) Utiliser le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormale à partir de la base $(1, X, X^2)$.
c) Soit $P$ le polynôme de $E$ tel que $P(-1) = 2,\ P(0) = 1$ et $P(1) = -1$. Trouver le polynôme $Q_0$ de $\mathbb{R}_1[X]$ qui rend minimale la quantité

$$\sum_{k=-1}^{1} (P(k) - Q(k))^2 \quad , \quad Q \in \mathbb{R}_1[X]$$

*On ne demande pas de calculer ce minimum !*

# TD3 - Endomorphismes adjoints et réflexions orthogonales

## 1 Endomorphismes adjoints, auto-adjoints et matrices symétriques

### Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X],\ \langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

a) Montrer que l'endomorphisme $\varphi$ défini sur $E$ par $\varphi(P) = (1 - X^2)P'' - 2XP'$ est symétrique.
b) L'endomorphisme $\varphi$ est-il diagonalisable ? Justifier sans faire de calculs.
c) Déterminer la matrice de $\varphi$ dans la base canonique de $E$. Que remarque-t-on ?
d) Quelles sont les valeurs propres de $\varphi$ ?

### Exercice 2

Soit $E$ un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot\rangle$ et $u, v \in E$ deux vecteurs. On pose

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \to & E \\ & x & \mapsto & \langle x, u\rangle v - \langle x, v\rangle u. \end{array}$$

Calculer $\varphi^*$ en fonction de $u$ et $v$. Que remarque-t-on ?

### Exercice 3

Soit $E$ un espace euclidien et $\varphi \in \mathrm{End}(E)$. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

(i) $\varphi$ est anti-auto-adjoint (i.e. $\forall x \in E,\ \varphi^*(x) = -\varphi(x)$) ;

(ii) $\forall x \in E,\ \varphi(x)$ est orthogonal à $x$.

### Exercice 4 *

Soit $E$ un espace euclidien et $u \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme.
a) Montrer que $\ker u = \ker u^* \circ u$.
b) Montrer que $\left(\mathrm{im}(u^*)\right)^{\perp} = \ker u$.
c) En déduire $\mathrm{rg}(u^*) = \dim(\ker u)^{\perp}$, puis que $\mathrm{im}(u^*) = \mathrm{im}(u^* \circ u)$.

### Exercice 5 *

Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$. Un endomorphisme $u$ de $E$ est dit antisymétrique si

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x)|y\rangle = -\langle x|f(y)\rangle$$

1. Montrer que $f$ est antisymétrique si, et seulement si, $f^* = -f$.
2. En déduire que $f$ est antisymétrique si, et seulement si, sa matrice dans toute base orthogonale est antisymétrique.
3. Montrer que $f$ est antisymétrique si, et seulement si, $\forall x \in E,\ \langle x, f(x)\rangle = 0$.
4. Soit $f$ un endomorphisme antisymétrique de $E$. Montrer que les sous-espaces $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker f$ sont orthogonaux.

## 2 Matrices orthogonales : généralités

### Exercice 6

Quelles sont les matrices qui sont orthogonales et triangulaires supérieures ?

### Exercice 7

Soient $A, B \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $\frac{A+2B}{3} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice $C = {}^tAB$ est antisymétrique, c'est-à-dire ${}^tC = -C$.

### Exercice 8 **

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.
On pose $\sigma = a + b + c$ et $\tau = bc + ac + ab$.
a) Montrer que $M \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\sigma \in \{\pm 1\}$ et $\tau = 0$.
b) A quelle condition sur $\sigma$ et $\tau$ a-t-on $M \in \mathrm{O}_3^+(\mathbb{R})$ ?
c) Montrer que si $M \in \mathrm{O}_3^+(\mathbb{R})$, alors il existe $\lambda \in [0, \frac{4}{27}]$ tel que $a, b, c$ sont les racines du polynôme $X^3 - X^2 + \lambda$.

## 3 Théorème spectral

### Exercice 9

Pour chacune des matrices $A_i$ suivantes, déterminer une matrice orthogonale $P_i$ et une matrice diagonale $D_i$ telles que $A_i = P_i D_i P_i^{-1}$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

### Exercice 10 *

a) Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tNN$.
b) Réciproquement, soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
c) Montrer que si $M$ est une matrice inversible alors la matrice $A = {}^tMM$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont strictement positives.

### Exercice 11 **

On considère $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on note $S_{a,b} = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & \cdots & a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) On pose $J = S_{1,1}$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. Justifier que $J$ est diagonalisable et déterminer ses espaces propres.
b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer les espaces propres de $S_{a,b}$.
*Indication : On pourra établir une relation simple entre $S_{a,b}$, $J$, $I_n$, $a$ et $b$.*
c) Pour quels couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ a-t-on $S_{a,b} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ?

## 4 Isométries et réflexions orthogonales

**Exercice 12** ***Une matrice symétrique et orthogonale***

Soit $E = \mathbb{R}^3$ l'espace euclidien usuel. Pour $a$, $b \in \mathbb{R}$, on note

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

On note $f_{a,b}$ l'endomorphisme de matrice $M(a,b)$ dans la base canonique de $E$.
a) Donner la liste de tous les couples $(a,b)$ pour lesquels $f_{a,b}$ est une isométrie.
b) Justifier, sans faire de calculs, que si $M \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$, alors $f_{a,b}$ est une symétrie orthogonale.
c) Lorsque $f_{a,b}$ est une réflexion orthogonale, déterminer en fonction de $(a,b)$ l'espace $F$ tel que $f_{a,b}$ est la réflexion orthogonale par rapport à $F$.

**Exercice 13**

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel et de la base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

a) Montrer que la matrice $A$ est orthogonale. Quelle est la nature de $f$ ?
b) Donner les caractéristiques géométriques de $f$.
c) Justifier, sans faire de calcul, que $A$ est diagonalisable.
d) Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de $f$ dans $\mathcal{B}'$ soit de la forme

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

*Remarque : il n'est pas demandé de calculer explicitement la base $\mathcal{B}'$.*

**Exercice 14**

L'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure usuelle et de la base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit $s$ la symétrie orthogonale par rapport au plan $P$ d'équation cartésienne : $x + y + z = 0$.
a) Citer une formule du cours exprimant $s(x)$ en fonction de $x$ et de $n$, où $n$ est un vecteur non nul orthogonal à $P$.
b) Donner la matrice de $s$ dans la base canonique $\mathcal{B}_c$.

**Exercice 15**

Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$. Soient $u$ un vecteur de $E$ et $k$ un réel. On définit un endomorphisme $f$ de $E$ par

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x + k\langle x, u\rangle u. \end{array}$$

a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $k \in \mathbb{R}$ et $u \in E$ pour que $f$ soit un automorphisme orthogonal.
b) Décrire $f$ dans ce cas.

**Exercice 16 *** ***Matrice de Householder***

Soit $a \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ une matrice ligne. On pose

$$A = I_n - \frac{2}{\|a\|^2}\,{}^t a a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Montrer que $A$ est une matrice symétrique, involutive (i.e. $A^2 = I_n$) et orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

# TD4 - Angles et isométries en dimension 2 et 3

## 1 Isométries en dimension 2, angles et orientation

### Exercice 1 Angles orientés

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. On note $\mathcal{B}_c = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ sa base canonique. On oriente $\mathbb{R}^2$ en décrétant que $\mathcal{B}_c$ est directe. Pour chaque paire de vecteurs $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, donner une mesure $\theta(u, v)$ de l'angle orienté entre $u$ et $v$.

a) $u = (1, 2)$ et $v = (5, 10)$ b) $u = (0, 1)$ et $v = (0, -1)$

c) $u = (0, 1)$ et $v = (1, 1)$ d) $u = (\sqrt{3}, 1)$ et $v = (-1, 0)$

### Exercice 2 Une composée de deux réflexions

Soit $E = \mathbb{R}^2$ le plan euclidien muni du produit scalaire canonique. On considère les deux vecteurs $f_1 = (1, 1)$ et $f_2 = (\sqrt{3}, 1)$.
a) Déterminer l'angle non-orienté entre les vecteurs $f_1$ et $f_2$.
b) Dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, écrire la matrice de la réflexion orthogonale $s_i$ par rapport à $\mathrm{Vect}(f_i)$ pour $i = 1$ et $i = 2$.
c) Soit $u = s_1 \circ s_2$. Calculer la matrice de $u$ dans la base canonique et décrire la transformation du plan $u$. Pouvait-on le deviner sans calculs supplémentaires ?

### Exercice 3

Pour chacune des matrices suivantes, dire si elle est dans $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$. Lorsque c'est le cas, l'écrire comme un produit de matrices de réflexions orthogonales du plan.

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

### Exercice 4 *

Soit $E$ un espace euclidien de dimension 2. Soient $u, v \in E$ deux vecteurs non nuls tels que $\|u\| = \|v\|$. Décrire géométriquement les isométries $f \in \mathrm{O}(E)$ telles que $f(u) = v$ et faire un dessin dans chaque situation.

### Exercice 5 *

Soit $E$ un plan euclidien et $D$ une droite de $E$. Soit $r \in \mathrm{O}^+(E)$ la rotation d'angle $\theta$ et $s$ la réflexion par rapport à $D$. À quelle condition a-t-on $s \circ r = r \circ s$ ?
Faire un dessin de la situation.

## 2 Produit vectoriel et produit mixte

### Exercice 6

On considère l'espace $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel et orienté par une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
a) Simplifier :

$$2\,\vec{j} \wedge (-3)\vec{k} \qquad \text{et} \qquad \vec{i} \wedge (\vec{i} - 2\vec{k})$$

b) Soient $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$. Calculer :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \qquad \text{et} \qquad \vec{v} \wedge \vec{u}$$

### Exercice 7

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de $E$ et $u \in E$ un vecteur non nul.
On considère ici l'application linéaire $f : E \to E$ définie par $f(x) = u \wedge x$ pour tout $x \in E$.
a) Montrer que $f(x)$ et $x$ sont orthogonaux pour tout $x \in E$.
b) Décrire $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ en fonction de $u$.
c) On écrit $u = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. Déterminer la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$. Que remarque-t-on ?

### Exercice 8

En utilisant un produit vectoriel, déterminer :
a) une équation cartésienne du plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par $u = (2, 1, 5)$ et $v = (-2, 0, 3)$ ;
b) un système d'équations cartésiennes de la droite de $\mathbb{R}^3$ dirigée par $w = (4, -2, 1)$.
Faire un dessin de chaque situation.

### Exercice 9 *

Soit $a \in \mathbb{R}$. Á l'aide d'un produit vectoriel, résoudre en fonction de $a$ le système d'équations

$$\begin{cases} ax - 3y + 5az = 0 \\ 2x + ay + 7z = 0 \end{cases}$$

### Exercice 10 *

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension trois $E$. Étudier l'équation à l'inconnue $\vec{x} \in E$ :

$$\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}.$$

*Indication : on pourra commencer par montrer que cette équation admet une solution si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.*

### Exercice 11 *

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3 et $u, v, w \in E$ trois vecteurs.
a) Montrer que $u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w\rangle v - \langle u, v\rangle w$.
b) Montrer que $(u \wedge v) \wedge w = \langle u, w\rangle v - \langle v, w\rangle w$.
c) Montrer que $(u \wedge v) \wedge (u \wedge w) = [u, v, w]u$.
d) En déduire que $[u \wedge v, v \wedge w, w \wedge u] = [u, v, w]^2$.

### Exercice 12 **

Soient $(f, g, h)$ et $(u, v, w)$ deux bases orthonormées directes d'un espace euclidien orienté de dimension 3. Montrer que la famille $(f - u, g - v, h - w)$ est liée.

## 3 Isométries en dimension 3

**Exercice 13**

On considère l'espace euclidien orienté usuel $\mathbb{R}^3$. Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que $f$ est une rotation.
b) Déterminer les éléments caractéristiques de $f$.

**Exercice 14**

L'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel et de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On consdière la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & c \end{pmatrix} \qquad \text{où } \ a, b, c \ \text{ sont des réels donnés}$$

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $M$.

Déterminer les valeurs de $a, b$ et $c$ pour lesquelles l'endomorphisme $f$ est une isométrie directe et en donner les caractéristiques géométriques.

**Exercice 15**

Dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$ usuel, donner la matrice de la rotation d'axe $D = \text{Vect}(1, 1, 1)$, orienté par le vecteur $u = (1, 1, 1)$, et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

**Exercice 16**

On considère l'espace euclidien orienté usuel $\mathbb{R}^3$. Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $f$ est une isométrie de $\mathbb{R}^3$ et en donner les caractéristiques géométriques.

**Exercice 17**

On munit l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est de la base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $f$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_c$ est donnée par

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & -2 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que $f$ est une isométrie.
b) Préciser la nature de cette isométrie et en donner les caractéristiques géométriques.
c) Montrer que $A$ est diagonalisable. Quelles sont les valeurs propres de $A$ ? Justifier votre réponse.
d) Diagonaliser $A$ dans une base orthonormée de $E$.

**Exercice 18 ***

Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $a \in E$ un vecteur unitaire. Soit $f : E \to E$ l'application définie par $f(x) = x \wedge a + \langle x|a\rangle a$ pour tout vecteur $x \in E$.
a) Soit $x \in E$ un vecteur de norme $\|x\| = r$. Justifier l'existence d'un réel $\theta$ tel que

$$\|x \wedge a\| = r\sin(\theta) \qquad \text{et} \qquad \|\langle x|a\rangle a\| = r\cos(\theta).$$

b) Montrer, sans faire de calculs matriciels, que $f$ est une isométrie.
c) On choisit $b, c \in E$ tels que $(a, b, c)$ est une base orthonormée directe de $E$. Déterminer $f(b)$ et $f(c)$ en fonction de $a, b, c$.
d) Montrer que $f$ est une rotation de $E$. Préciser son axe et son angle.
*Indication : On pourra commencer par construire une base orthonormée directe de E ayant pour premier vecteur a et déterminer la matrice de f dans cette nouvelle base.*

**Exercice 19 ***

L'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel. On consdière la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a\cos t & \sin t & -b\cos t \\ b & 0 & a \\ a\sin t & -\cos t & -b\sin t \end{pmatrix} \qquad \text{où} \quad a, b, t \quad \text{sont des réels donnés.}$$

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A$.
a) Pour quelles valeurs de $a, b, t \in \mathbb{R}$ l'endomorphisme $f$ est-il une isométrie, une rotation ?
b) Donner les caractéristiques géométriques de $f$ dans le cas $a = b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $t = \dfrac{\pi}{4}$.

# TD5 - Formes quadratiques réelles

## 1 Généralités sur les formes quadratiques

### Exercice 1

Dans cet exercice, on considère des applications $q : E \to \mathbb{R}$ où $E$ est un espace vectoriel réel de dimension finie. Pour chaque application, dire si oui ou non c'est une forme quadratique et, lorsque c'est une forme quadratique, préciser :

(a) sa forme polaire ;

(b) sa matrice dans la base canonique ;

(c) son noyau et son rang.

1. $E = \mathbb{R}^2$ et $q(x, y) = 2x^2 - 3y^2 + xy$.
2. $E = \mathbb{R}^2$ et $q(x, y) = xy$.
3. $E = \mathbb{R}^2$ et $q(x, y) = x^2 + y^2 - x^2y$.
4. $E = \mathbb{R}^3$ et $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + 2yz$
5. $E = \mathbb{R}^3$ et $q(x, y, z) = 2xy + 2yz$.
6. $E = \mathbb{R}[X]_{\leqslant 2}$ et $q(P) = P'(0)P(1)$.
7. $E = \mathbb{R}[X]_{\leqslant 2}$ et $q(P) = -\displaystyle\int_0^1 P(t)^2 dt$.
8. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $q(A) = \mathrm{Tr}({}^tAA)$.

### Exercice 2 Formule du parallélogramme

Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension finie et $q$ une forme quadratique sur $E$. Soit $\varphi$ la forme polaire associée à $q$.

1. Soient $x, y \in E$. Exprimer $q(x + y) - q(x - y)$ en fonction de $\varphi(x, y)$.
2. Soient $x, y \in E$. Exprimer $q(x + y) + q(x - y)$ en fonction de $q(x)$ et $q(y)$.

### Exercice 3

On considère la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie par $q(x, y) = xy$. On désigne par $\varphi$ la forme polaire de $q$. On note $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

(a) Calculer $q(e_1)$ et $q(e_2)$ et $q(e_1 + e_2)$.

(b) Justifier que $e_1$ et $e_2$ ne sont pas $\varphi$-orthogonaux.

(c) Quels sont les vecteurs $v \in \mathbb{R}^2$ tels que $q(v) = 0$ ?

(d) Montrer que $q$ est non-dégénérée.

(e) Quels sont les vecteurs $v$ qui sont $\varphi$-orthogonaux à $e_1$ ?

(f) On pose $f_1 = e_1 + e_2$ et $f_2 = e_1 - e_2$. Montrer que $(f_1, f_2)$ est une base $\varphi$-orthogonale.

(g) Quelle est la signature de $q$ ?

## 2 Bases orthonormées et réduction de Gauss

### Exercice 4

Soit $q$ la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie par $q(x,y,z,t) = xy + zt$. On note $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

(a) Déterminer la forme polaire $\varphi$ de $q$ et écrire la matrice de $q$ dans la base canonique $\mathcal{B}_c$.

(b) Soit $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = e_3 + e_4$ et $f_4 = e_3 - e_4$. Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base $\varphi$-orthogonale.

(c) Déterminer la matrice que $q$ dans la base $\mathcal{B}$ et en déduire la signature et le rang de $q$.

(d) Retrouver ce résultat en appliquant une réduction de Gauss à $q$.

### Exercice 5 Algorithme de Gauss

On donne des formes quadratiques en coordonnées dans la base canonique d'un espace $\mathbb{R}^n$. Pour chacune d'elles, donner le rang, le noyau et la signature.

(a) $n = 3$ et $q(x,y,z) = (x+y+z)^2$.

(b) $n = 2$ et $q(x,y) = x^2 - 6xy + 5y^2$.

(c) $n = 2$ et $q(x,y) = 3x^2 + y^2 + 2xy$.

(d) $n = 3$ et $q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy + 4yz$.

(e) $n = 3$ et $q(x,y,z) = x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2xy + 4yz - 2xz$.

(f) $n = 3$ et $q(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2 + 4xy + 6xz + 8yz$

### Exercice 6 * Réduction de Gauss bis

Pour chacune des formes quadratiques suivantes, déterminer le rang et la signature.

(a) $q(x,y,z) = 3xy - 2xz + 5yz$

(b) $q(x,y,z,t) = 4xy + 6yz + 4zt$

(c) $q(x,y,z) = xy + xz + xt + yz + yt + zt$

### Exercice 7 *

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère la forme quadratique

$$Q(x,y,z) = 5x^2 + y^2 + az^2 + 4xy - 2xz - 2yz$$

Réduire la forme quadratique $Q$ par la méthode de Gauss. Trouver sa signature et son rang.
*On discutera selon les valeurs du réel $a$.*

### Exercice 8 *

En utilisant la réduction de Gauss, déterminer, la forme polaire, le rang et la signature des formes quadratiques réelles suivantes :

(a) $Q(x,y,z) = 2x^2 - y^2 - 4xy - 8yz$

(b) $Q(x,y,z,t) = xy + xz + yz + zt$

(c) $Q(x,y,z,t) = 2x^2 + 2xy - 6xz + yt + zt - \frac{1}{2}t^2$

# 3 Isotropie

**Exercice 9 * Cône isotrope**

Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension finie et $q$ une forme quadratique quelconque sur $E$. On note $\ker q$ le noyau de $q$ et $C(q) = \{x \in E,\ q(x) = 0\}$. On notera $\varphi$ la forme polaire associée à $q$.

(1) Montrer que $\ker q \subseteq C(q)$.

(2) On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}^2$ et $q(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$.

  (a) Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

  (b) En déduire que $C(q) = \ker q = \{0\}$.

(3) On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}^2$ et $q(x, y) = 3x^2 - 2xy - y^2$.

  (a) Montrer que $\ker q = \{0\}$.

  (b) Montrer que $\ker q \neq C(q)$.

(4) On suppose dans cette question que $q$ est telle qu'il existe deux vecteurs $u, v \in E$ tels que $q(u) > 0$ et $q(v) < 0$.

  (a) Montrer que $u$ et $v$ sont linéairement indépendants.

  (b) Soit $F = \mathrm{Vect}(u, v)$. Montrer que la restriction de $q$ à $F$ est non dégénérée.

  (c) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $q(u + \lambda v) = 0$.

  (d) En déduire que $C(q) \neq \ker q$.

**Exercice 10 ** Cône isotrope (suite)**

Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension finie et $q$ une forme quadratique quelconque sur $E$. On note $\ker q$ le noyau de $q$ et $C(q) = \{x \in E,\ q(x) = 0\}$. On suppose que $C(q) \neq \ker q$.

(a) Montrer qu'il existe $x, y \in E$ tels que $q(x) = 0$ et $\varphi(x, y) \neq 0$.

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer $q(y + tx)$, en fonction de $q(y)$, $\varphi(x, y)$ et $t$.

(c) En déduire que $q : E \to \mathbb{R}$ est une application surjective.