Applications de l'immeuble de Bruhat-Tits en théorie des représentations

Anne-Marie Aubert

Institut de Mathématiques de Jussieu – Paris Rive Gauche
C.N.R.S., Sorbonne Université and Université Paris Cité

Journées Immeubles et Applications
Laboratoire de Mathématiques et Applications, UMR 7348 du CNRS
Université de Poitiers
1er Décembre 2023

Soient F un corps local non archimédien et G le groupe des F-points d'un groupe algébrique réductif connexe. Nous dirons que G est un groupe réductif p-adique.

Définition

Un immeuble euclidien est un complexe simplicial $\mathcal{B}$ de dimension finie (muni d'une métrique), équipé d'une famille $\mathfrak{F}$ de sous-espaces de $\mathcal{B}$ satisfaisant aux axiomes suivants:

(1) Tout $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$ est un complexe de Coxeter dans un espace euclidien $\mathbb{R}^\ell$

(2) Pour tous $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathfrak{F}$, il existe une isométrie de $\mathcal{F}_1$ sur $\mathcal{F}_2$ qui fixe $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ point par point

(3) Tout simplexe de codimension 1 est une face d'au plus trois simplexes de dimension maximale

(4) Pour tous $x, y \in \mathcal{B}$, il existe $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$ tel que $\{x, y\} \subset \mathcal{F}$.

Remarque

Le complexe de Coxeter d'un groupe de Coxeter (W, S) est l'ensemble partiellement ordonné des classes de la forme wW_I, où $I \subset S$ et $W_I = \langle I \rangle$, ordonné par inclusion inversée.

Théorème [Tits]

L'immeuble de Bruhat-Tits $\mathcal{B}(G)$ d'un groupe réductif p-adique G est un immeuble euclidien. Réciproquement, tout immeuble euclidien de dimension au moins 4 est l'immeuble de Bruhat-Tits d'un groupe réductif p-adique.

Pour tout point x de $\mathcal{B}(G)$, Bruhat et Tits ont construit un sous-groupe compact $G_{x,0}$ de G, appelé sous-groupe parahorique

Moy et Prasad ont défini des filtrations de $G_{x,0}$ par des sous-groupes distingués

$$G_{x,0} \triangleright G_{x,r_1} \triangleright G_{x,r_2} \triangleright G_{x,r_3} \triangleright \cdots$$

où $0 < r_1 < r_2 < r_3 < \cdots$ sont des nombres réels qui dépendent de x.

Les filtrations de Moy et Prasad de $G_{x,0}$ sont une combinaison de filtrations pour divers groupes radiciels, définies via la notion de valuation d'une donnée radicielle, avec une filtration du centralisateur d'un tore déployé maximal.

Notation

Soit $\mathbf{T}$ un F-tore. Le groupe $T := \mathbf{T}(F)$ a un unique sous-groupe borné maximal:

$$T_b = \{t \in T \,:\, v(\chi(t)) = 0 \text{ for all } \chi \in X^*(\mathbf{T})\}.$$

Sous-groupe d'Iwahori

Notons $\mathbf{T}(F_{\mathrm{nr}})^0 \subset \mathbf{T}(F)$ l'image de $\mathbf{T}(E)_b$ sous l'application norme $\mathbf{T}(E) \to \mathbf{T}(F_{\mathrm{nr}})$ pour toute extension galoisienne finie E/F_{nr} qui déploie $\mathbf{T}$. Posons

$$T^0 := \mathbf{T}(F_{\mathrm{nr}})^0 \cap T.$$

Le groupe T^0 est un sous-groupe d'Iwahori de T.

Tore induit

Un F-tore T est dit *induit* si le réseau $X^*(\mathbf{T})$, ou de manière équivalente $X_*(\mathbf{T})$, possède une $\mathbb{Z}$-base invariante sous l'action du groupe de Galois d'une extension de F déployant T.

Tore faiblement induit

$\mathbf{T}$ est dit *faiblement induit* s'il existe une extension modérément ramifiée E/F telle que $\mathbf{T}_E := \mathbf{T} \times_E F$ soit induit.

Remarque

Si $\mathbf{G}$ est ou bien adjoint, ou bien simplement connexe, ou encore se déploie sur une extension modérément ramifiée, alors tout tore maximal et maximalement déployé de $\mathbf{G}$ est faiblement induit.

Filtrations pour les tores faiblement induits

$T_0 := \mathbf{T}(F)^0$, et pour $r > 0$:

$$T_r = \mathbf{T}(F)_r := \{t \in T_0 \,:\, v(\chi(t) - 1) \geq r \text{ for all } \chi \in X^*(T)\}. \tag{1}$$

C'est une filtration strictement décroissante de T_0 par des sous-groupes ouverts bornés, qui est *séparée* ($\bigcap_r T_r = \{1\}$).

Le sous-groupe Z_r

Soit $\mathbf{S}$ un F-tore déployé maximal de $\mathbf{G}$, et $\mathbf{Z}$ son centralisateur dans $\mathbf{G}$. Si $\mathbf{G}$ est quasi-déployé, $\mathbf{Z}$ est un tore maximal $\mathbf{T}$, et $\mathbf{Z}_r$ est alors défini par (1). Nous supposons pour le moment que Z_r a été aussi défini lorsque $\mathbf{G}$ n'est pas quasi-déployé.

Le sous-groupe U_a de G, for $a \in \Phi$, possède la filtration suivante par des sous-groupes ouverts compacts U_α, indexée par les $\alpha \in \Phi_{\mathrm{aff}}$ de gradient a.

Construction d'une valuation φ_a^x du groupe radiciel U_a pour $x \in A$, et $a \in \Phi$

Soit $u \in U_a - \{1\}$, il existe une fonction affine à valeurs réelles ψ_a^u sur A, de dérivée égale à a, telle que l'ensemble des points de A fixés par u soit le demi-appartement fermé $\{x \in A \,:\, \psi_a^u(x) \geq 0\}$.

Définition de $U_{a,x,r}$

Pour $u \in U_a$, nous posons $\varphi_a^x(u) := \psi_a^u(x)$. Posons $\varphi_a^x(1) := \infty$. Soit $x \in A$. Nous définissons

$$U_{a,x,r} := (\varphi_a^x)^{-1}([r, \infty]). \tag{2}$$

Soit $\widetilde{\Phi} := \Phi \cup \{0\}$. Une fonction $f\colon \Phi \to \mathbb{R}$ est dite *concave* si $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$ pour tout $a, b \in \Phi$ tels que $a + b \in \Phi$.

Définition de $G_{x,f}$

Soit $f\colon \Phi \to \mathbb{R}$ une fonction concave. Définissons le sous-groupe suivant de G:

$$U_{a,x,f} := U_{a,x,f(a)} \cdot U_{2a,x,f(2a)}. \tag{3}$$

Notons $U_{x,f}$ le sous-groupe de G engendré par les $U_{a,x,f}$ pour tous les $a \in \Phi$. Posons

$$G_{x,f} := U_{x,f} \cdot Z_{f(0)}. \tag{4}$$

Définition de $G_{x,r}$

Soit $G_{x,r}$ le sous-groupe (ouvert borné) de G engendré par Z_r et les $U_{a,x,r}$ pour les $a \in \Phi$.

Remarque

La définition de $G_{x,r}$ est complète, lorsque G est quasi-déployé. Pour le cas non quasi-déployé, il nous reste à définir Z_r.

Définition of Z_r lorsque $\mathbf{G}$ n'est pas quasi-déployé

L'immeuble $\mathcal{B}(Z)$ est constitué d'un unique point x. Le group $\mathbf{Z}(F_{\mathrm{nr}})$ est quasi-déployé et $x \in \mathcal{B}(Z) \subset \mathcal{B}(\mathbf{Z}(F_{\mathrm{nr}}))$. En appliquant la construction précédente au groupe $\mathbf{Z}(F_{\mathrm{nr}})$, nous obtenons les sous-groupes $\mathbf{Z}(F_{\mathrm{nr}})_{x,r}$. Posons

$$Z_r := \mathbf{Z}(F_{\mathrm{nr}})_{x,r} \cap Z.$$

Notation

Posons

$$G_{x,r+} := \bigcup_{t>r} G_{x,t} \quad \text{and} \quad \mathbb{G}_{x,r} := G_{x,r}/G_{x,r+}$$

Lorsque $r > 0$, le quotient $\mathbb{G}_{x,r}$ est abélien et s'identifie à un espace vectoriel sur le corps résiduel k_F de F.

Remarque

Le sous-groupe parahorique $G_{x,0}$ et son sous-groupe $G_{x,0+}$ dépendent seulement de la facette contenant x. En général, ce n'est pas le cas pour $G_{x,r}$, qui peut dépendre du point x choisi dans la facette.

Représentations lisses de G

Représentations (π, V) telles que $\mathrm{Stab}_G(v)$ est ouvert pour tout $v \in V$. Notation: $\mathfrak{R}(G)$ catégorie des représentations lisses de G, et $\mathrm{Irr}(G)$ l'ensemble des objets irréductibles de $\mathfrak{R}(G)$.

Profondeur (ou niveau) d'une représentation lisse irréductible [Moy-Prasad, 1994]

La profondeur de π est le plus petit nombre réel $\mathrm{d}(\pi) \geq 0$ tel qu'il existe un point $x \in \mathcal{B}(G)$ satisfaisant $V^{G_{x,\mathrm{d}(\pi)+}} \neq \{0\}$.

Soit $\mathbf{L}$ un F-sous-groupe de Levi d'un F-sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$. Soit $\sigma \in \mathrm{Irr}(L)$ supercuspidale. Notons $\mathfrak{X}_{\mathrm{nr}}(L)$ le groupe des caractères non ramifiés de $L := \mathbf{L}(F)$, et

- $(L, \sigma)_G$ la classe de G-conjugaison de (L, σ)
- $\mathfrak{s} := [L, \sigma]_G$ la classe de G-conjugaison de $(L, \mathfrak{X}_{\mathrm{nr}}(L) \cdot \sigma)$.

Soit $\mathfrak{B}(G)$ l'ensemble des $\mathfrak{s}$.

Décomposition de Bernstein de la catégorie $\mathfrak{R}(G)$

Soit $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{R}(G)$ dont les objets sont les représentations (π, V) dont tout G-sous-quotient est équivalent à un sous-quotient d'une induite parabolique $\mathrm{i}_{L,P}^{G}(\sigma')$, où $\sigma' \in \mathcal{O}$. Les catégories $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}(G)$ sont indécomposables et:

$$\mathfrak{R}(G) = \prod_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)} \mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}(G). \tag{5}$$

Notons $\mathrm{Irr}^{\mathfrak{s}}(G)$ l'ensemble des objets irréductible de $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}(G)$.

Définition [Bushnell-Kutzko]

Une paire (J, λ) est un $\mathfrak{s}$-type pour G si elle satisfait à la propriété suivante:

$$(\lambda \text{ intervient dans la restriction de } \pi \in \mathrm{Irr}(G) \text{ à } J) \Leftrightarrow (\pi \in \mathrm{Irr}^{\mathfrak{s}}(G)).$$

Exemple

La paire (I, triv), où I est un sous-groupe d'Iwahori de G, est un $\mathfrak{s}$-type pour $\mathfrak{s} = [T, \mathrm{triv}]_G$, où T est le groupe des F-points d'un tore maximal déployé.
Plus généralement, soit $x \in \mathcal{B}(G)$ et $\tau \in \mathrm{Irr}(G_x/G_{x,0+})$ cuspidale.
Notons $\boldsymbol{\tau}$ l'inflation de τ à G_x (sous-groupe parahorique "non connexe").
La paire $(G_x, \boldsymbol{\tau})$ est un $\mathfrak{s}$-type pour G, où $\mathfrak{s} = [L, \sigma]_G$, avec σ de profondeur nulle.

Soit E/F une extension finie modérément ramifiée. Nous appelons E-sous-groupe de Levi tordu de $\mathbf{G}$ un F-sous-groupe $\mathbf{G}'$ de $\mathbf{G}$ tel que $\mathbf{G}' \otimes_F E$ est un E-sous-groupe de Levi d'un E-sous-groupe parabolique de $\mathbf{G} \otimes_F E$.

Plongements d'immeubles

Soit L un sous-groupe de Levi de G et $y \in \mathcal{B}(L)$. Le plongement $\iota\colon \mathcal{B}(L) \hookrightarrow \mathcal{B}(G)$ est dit (y, r)-générique si, pour tore F-déployé maximal $\mathbf{S}$ de $\mathbf{L}$ tel que $y \in \mathcal{A}(\mathbf{L}, \mathbf{S}, F)$ (appartement associé à $\mathbf{S}$ dans $\mathcal{B}(L)$), on a

$$U_{a,\iota(y),r} = U_{a,\iota(y),r+} \quad \text{pour tout } a \in \Phi(\mathbf{G}, \mathbf{S}) - \Phi(\mathbf{L}, \mathbf{S}).$$

Soit $\vec{\mathbf{G}} = (\mathbf{G}^0 \subset \mathbf{G}^1 \subset \cdots \subset \mathbf{G}^d)$ une suite de E-sous-groupes de Levi tordus de $\mathbf{G}$, avec E/F modérément ramifiée. Soit L^0 sous-groupe de Levi de G^0 et $A_{\mathbf{L}^0}$ le tore F-déployé maximal du centre $\mathrm{Z}_{\mathbf{L}^0}$ de $\mathbf{L}^0$. Définissons $\mathbf{L}^i := \mathrm{Z}_{\mathbf{G}^i}(A_{\mathbf{L}^0})$ ($\mathbf{L}^i$ est un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}^i$), et posons $\vec{\mathbf{L}} := (\mathbf{L}^0, \mathbf{L}^1 \cdots, \mathbf{L}^d)$.

Définition

Diagramme commutatif de plongements:

$$\{\iota\} : \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{B}(G^0) \arrow[r, hook, "\iota"] & \mathcal{B}(G^1) \arrow[r, hook, "\iota"] & \cdots \arrow[r, hook, "\iota"] & \mathcal{B}(G^d) \ . \\ \mathcal{B}(L^0) \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[r, hook, "\iota"] & \mathcal{B}(L^1) \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[r, hook, "\iota"] & \cdots \arrow[r, hook, "\iota"] & \mathcal{B}(L^d) \arrow[u, hook, "\iota"] \end{tikzcd}$$

Définition

Soit $\vec{s} = (s_0, s_1, \cdots, s_d)$ une suite de nombres réels et $y \in \mathcal{B}(L^0)$. Nous dirons que $\{\iota\}$ est $(\vec{s}, y)$-générique si le plongement $\iota \colon \mathcal{B}(L^i) \hookrightarrow \mathcal{B}(G^i)$ est (y, s_i)-générique, pour $0 \leq i \leq d$.

Définition [Kim-Yu]

Une *G-donnée de profondeur nulle* est un triplet

$$((\mathbf{G}, \mathbf{L}), (y, \iota), \boldsymbol{\tau}_L)$$

où

(1) $\mathbf{G}$ est un F-groupe réductif connexe

(2) $\mathbf{L}$ est un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}$

(3) $y \in \mathcal{B}(L)$ est tel que $L_{y,0}$ soit un sous-groupe parahorique maximal de L, et $\iota\colon \mathcal{B}(L) \hookrightarrow \mathcal{B}(G)$ un plongement $(y, 0)$-générique

(4) $\boldsymbol{\tau}_L \in \mathrm{Irr}(L_y)$ est tel que $\boldsymbol{\tau}_L | L_{y,0}$ soit l'inflation à $L_{y,0}$ d'une représentation cuspidale de $\mathbb{L}_{y,0}$.

Définition

Une **G**-donnée est un 5-uplet $\mathcal{D} = ((\vec{\mathbf{G}}, \mathbf{L}^0), (y, \{\iota\}), \vec{r}, \boldsymbol{\tau}_{L^0}, \vec{\phi})$ formé de

D1. $\vec{\mathbf{G}} = (\mathbf{G}^0 \subset \mathbf{G}^1 \subset \cdots \subset \mathbf{G}^d = \mathbf{G})$: suite de E-sous-groupes de Levi tordus de $\mathbf{G}$, avec E/F modérément ramifiée, et L^0 sous-groupe de Levi de G^0;

D2. $\vec{r} = (r_0, r_1, \cdots, r_d)$: suite de nombres réels tels que $0 < r_0 < r_1 < \cdots < r_{d-1} \leq r_d$ si $d > 0$, and $0 \leq r_0$ si $d = 0$;

D3. $y \in \mathcal{B}(\mathbf{L}^0, F)$, et $\{\iota\}$: diagramme commutatif de plongements $(\vec{s}, y)$-générique, où $\vec{s} = (0, r_0/2, \cdots, r_{d-1}/2)$;

D4. $\mathcal{D}^0 := ((\mathbf{G}^0, \mathbf{L}^0), (y, \iota), \boldsymbol{\tau}_{L^0})$: G^0-donnée de profondeur nulle;

D5. $\vec{\phi} = (\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_d)$: suite de quasi-caractères, telle que ϕ_i est un quasi–caractère de G^i, qui est "G^{i+1}-générique" de profondeur r_i relativement à y pour tout $y \in \mathcal{B}(G^i)$.

Soit $\mathcal{D} = ((\vec{\mathbf{G}}, \mathbf{L}^0), (y, \{\iota\}), \vec{r}, \boldsymbol{\tau}_{L^0}, \vec{\phi})$ une $\mathbf{G}$-donnée et $J_{G^0} := \langle L^0_y, G^0_{\iota(y),0} \rangle$. Pour $0 \le i \le d$, posons

$$\begin{cases} J^i := J_{G^0} G^1_{\iota(y),s_0} \cdots G^i_{\iota(y),s_{i-1}} \\ J^i_+ := G^0_{\iota(y),0+} G^1_{\iota(y),s_0+} \cdots G^i_{\iota(y),s_{i-1}+}. \end{cases} \tag{6}$$

J^i et J^i_+ sont des groupes:

Par récurrence sur i: $J^0 = J_{G^0}$ et $J^0_+ = G^0_{\iota(y),0+}$. Pour $i > 0$, $J_{G^0} G^1_{\iota(y),s_0} \cdots G^{i-1}_{\iota(y),s_{i-2}}$ est un groupe par hypothèse de récurrence. C'est un sous-groupe de $G^i_{\iota(y),0}$. Puisque $G^i_{\iota(y),0}$ normalise J_{G^0}, $G^1_{\iota(y),s_0}$, ..., $G^{i-1}_{\iota(y),s_{i-2}}$, on voit que $J_{G^0} G^1_{\iota(y),s_0} \cdots G^i_{\iota(y),s_{i-1}}$ est un groupe.

De manière analogue:

Posons

$$J^i_L := L^0_y L^1_{y,s_0} \cdots L^i_{y,s_{i-1}} \quad \text{and} \quad J^i_{L,+} := L^0_{y,0+} L^1_{y,s_0+} \cdots L^i_{y,s_{i-1}+}.$$

Principaux résultats

Pour chaque i:

- La **L**-donnée $\mathcal{D}_{\mathbf{L}} := (\vec{\mathbf{L}}, y, \vec{r}, \boldsymbol{\tau}_{L^0}, \vec{\phi})$ permet de construire un type supercuspidal (J_L^i, λ_L^i) pour L^i.
- λ_L^i se prolonge en une représentation Λ_L^i de $\widetilde{J}_L^i := \mathrm{N}_{L^i}(J_L^i)$.
- $\sigma^i := \mathrm{c-Ind}_{\widetilde{J}_L^i}^{L}(\Lambda_L^i)$ est supercuspidale irréductible [Yu].
- $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$ permet de construire un $\mathfrak{s}^i$-type (J^i, λ^i) pour G, où $\mathfrak{s}^i := [L^i, \sigma^i_{\mathcal{D}_L}]_{G^i}$ (qui est une paire couvrante de (J_L^i, λ_L^i)) [Kim-Yu].
- Si p est grand (i.e. ne divise pas $|W|$), toute supercuspidale irréductible de L^i s'obtient ainsi, et pour tout $\mathfrak{s}^i \in \mathfrak{B}(G^i)$, il existe un $\mathfrak{s}^i$-type ainsi construit [Kim (pour p très grand), Fintzen].
- Si p est petit, cette construction ne fournit en général pas toutes les supercuspidales, ni tous les $\mathfrak{s}^i$-types. D'autres constructions existent, qui sont exhaustives, pour $\mathrm{GL}_n(F)$ [Bushnell-Kutzko] et ses formes intérieures [Broussous, Sécherre-Stevens], $\mathrm{SL}_n(F)$ [Bushnell-Kutzko, Goldberg-Roche] (p arbitraire), les groupes classiques [Stevens, Miyauchi-Stevens] ($p \neq 2$).

Définition

Un système de coefficients (d'espaces vectoriels complexes) $\underline{V}$ sur l'immeuble de Bruhat-Tits $\mathcal{B}(G)$ est constitué d'espaces vectoriels complexes $V_{\mathcal{F}}$ pour toute facette $\mathcal{F}$ de $\mathcal{B}(G)$, et d'applications linéaires

$$\mathrm{r}_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}} \colon V_{\mathcal{F}} \longrightarrow V_{\mathcal{F}'} \quad \text{pour toute paire de facettes } \mathcal{F}' \subset \overline{\mathcal{F}}$$

telle que $\mathrm{r}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} = \mathrm{id}$ et $\mathrm{r}_{\mathcal{F}''}^{\mathcal{F}} = \mathrm{r}_{\mathcal{F}''}^{\mathcal{F}'} \circ \mathrm{r}_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}}$ si $\mathcal{F}'' \subset \overline{\mathcal{F}}'$ et $\mathcal{F}' \subset \overline{\mathcal{F}}$. Les systèmes de coefficients forment une catégorie $\mathrm{Coeff}(\mathcal{B}(G))$.

Pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, le groupe $G_{x,n+}$ dépend seulement de la facette $\mathcal{F}$ contenant le point x. Nous le noterons $G_{\mathcal{F},n+}$. Considérons la filtration

$$G_{\mathcal{F},0} \supset G_{\mathcal{F},0+} \supset G_{\mathcal{F},1+} \supset G_{\mathcal{F},2+} \cdots \supset \cdots$$

de $G_{\mathcal{F},0}$.

Le système de coefficients $\underline{V}$

Fixons un entier $n \geq 0$. Pour toute représentation (π, V) dans $\mathfrak{R}(G)$, nous disposons du système de coefficients $\underline{V} := (V^{G_{\mathcal{F},n+}})$ de sous-espaces de vecteurs fixes

$$V_{\mathcal{F}} := V^{G_{\mathcal{F},n+}} := \{v \in V \,:\, \pi(g)(v) = v \quad \text{for all } g \in G_{\mathcal{F},n+}\},$$

où les applications de transition $\mathrm{r}^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}'} \colon V^{G_{\mathcal{F},n+}} \hookrightarrow V^{G_{\mathcal{F}',n+}}$ sont les inclusions naturelles, puisque $G_{\mathcal{F}',n+} \subset G_{\mathcal{F},n+}$ pour $\mathcal{F}' \subset \overline{\mathcal{F}}$.

Le foncteur

$$\gamma_n \colon \mathfrak{R}(G) \longrightarrow \mathrm{Coeff}(\mathcal{B}(G)) \quad V \mapsto V^{G_{\mathcal{F},n+}}$$

est exact.

Le d-squelette de $\mathcal{B}(G)$

Via sa partition en facettes $\mathcal{B}(G)$ acquiert une structure de complexe polysimplicial localement fini, de dimension ℓ, où ℓ est le F-rang semi-simple de G. Pour $0 \leq d \leq \ell$, notons $\mathcal{B}(G)_d$ l'ensemble des facettes de dimension d de $\mathcal{B}(G)$.
Posons

$$\mathcal{B}(G)^d := \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{B}(G)_d} \overline{\mathcal{F}} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}(G)^{-1} := \emptyset.$$

Définition

Une d-facette orientée est:

- si $d > 0$, une paire $(\mathcal{F}, c)$, où $\mathcal{F} \in \mathcal{B}_d(F)$ et c est un générateur de $\mathrm{H}_d(\mathcal{B}(G)^d, \mathcal{B}(G)^d \backslash \mathcal{F}; \mathbb{Z})$; alors $(\mathcal{F}, -c)$ est aussi une d-facette orientée,
- une 0-facette orientée est simplement une 0-facette F (que l'on peut considérer aussi comme la paire $(\mathcal{F}, 1)$, où 1 est le générateur canonique de $\mathrm{H}_0(\mathcal{B}(G)^0, \mathcal{B}(G)^0 \backslash \mathcal{F}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$).

Notons $\mathcal{B}(G)_{(d)}$ l'ensemble des $\mathcal{F}$-facettes orientées.

Définition

Pour tout $0 \leq d \leq l$, l'espace des d-chaînes orientées de $\gamma_n(V)$ est défini comme étant le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{C}_{d,n}(V)$ des applications

$$\gamma \colon \mathcal{B}(G)_{(d)} \to V$$

telles que

- le support de γ est fini
- $\gamma((\mathcal{F}, c)) \in V^{G_{\mathcal{F},n+}}$
- si $d \geq 1$, $\gamma(\mathcal{F}, -c) = -\gamma(\mathcal{F}, c)$, pour tout $(\mathcal{F}, c) \in \mathcal{B}(G)_{(d)}$.

Le groupe G agit sur l'espace $\mathcal{C}_{d,n}(V)$ via

$$(g \cdot \gamma)((\mathcal{F}, c)) := g(\gamma((g^{-1}\mathcal{F}, g^{-1}c))).$$

L'application $\partial\colon \mathcal{C}_{d+1,n}(V) \longrightarrow \mathcal{C}_{d,n}(V)$ envoie γ sur l'application

$$(\mathcal{F}(x'), c') \mapsto \sum_{\substack{(\mathcal{F},c)\in\mathcal{B}_{(d+1)} \\ \mathcal{F}'\subset\overline{\mathcal{F}},\ \partial^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}'}(c)=c'}} \gamma((\mathcal{F}, c)).$$

Elle vérifie $\partial \circ \partial = 0$. On a donc le complexe de chaînes augmenté

$$\mathcal{C}_{d,n}(V) \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_{d-1,n}(V) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_{0,n}(V) \xrightarrow{\epsilon} V,$$

où ϵ envoie γ sur $\sum_{\mathcal{F}\in\mathcal{B}_{(0)}(G)} \gamma(F)$.

Notation

Pour tout sous-groupe ouvert compact J de G, notons $\mathfrak{R}^J(G)$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{R}(G)$ des représentations V qui sont engendrées par leurs J-invariants vecteurs V^J.

Proposition

La catégorie $\mathfrak{R}^{\leq n}(G)$ des représentations lisses de G de profondeur $\leq n$ est abélienne, et

$$\mathfrak{R}^{\leq n}(G) = \bigcup_{x \text{ sommet de } \mathcal{B}(G)} \mathfrak{R}^{G_{x,n+}}(G).$$

Définition

Un point x dans $\mathcal{A}$ est dit *spécial* si, pour chaque direction de mur, il existe un mur de $\mathcal{A}$ qui passe par x.

Theorem [Schneider-Stuhler, 1997]

Soit x un sommet spécial dans $\mathcal{A}$. Pour toute représentation V de G dans $\mathfrak{R}^{G_{\mathcal{F},n+}}$, le complexe augmenté $\mathcal{C}_{\star,n}(V) \longrightarrow V$ est une résolution exacte de V dans la catégorie $\mathfrak{R}(G)$.

Theorem [Schneider-Stuhler], [Broussous, représentations Iwahori-sphériques de $\mathrm{GL}_n(F)$]

Si (π, V) a un caractère central χ, alors $\mathcal{C}_{d,n}(V)$ est une résolution projective de (π, V) dans la sous-catégorie $\mathfrak{R}_\chi(G)$ des représentations de caractère central χ .

Corollaire

Soient (π, V) et (π', V') dans $\mathfrak{R}^{\leq n}(G)$ de type fini. Alors

- $\mathrm{Ext}^i(V, V')$ est de dimension finie,
- $\mathrm{Ext}^i(V, V') = 0$ si $i > \ell$.

Merci beaucoup pour votre attention!